3.ف.ك 2

10/09

فرض كتابي رقم 2

أسئلة

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\ln\left(\frac{x^2-x}{x+2}\right)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2\ln^3(x)=3\ln^2(x)-\ln(x)$

3) حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases} 2\ln x+\ln y=1 \\ 5\ln x+3\ln y=4 \end{cases}$

4) احسب التكاملين:

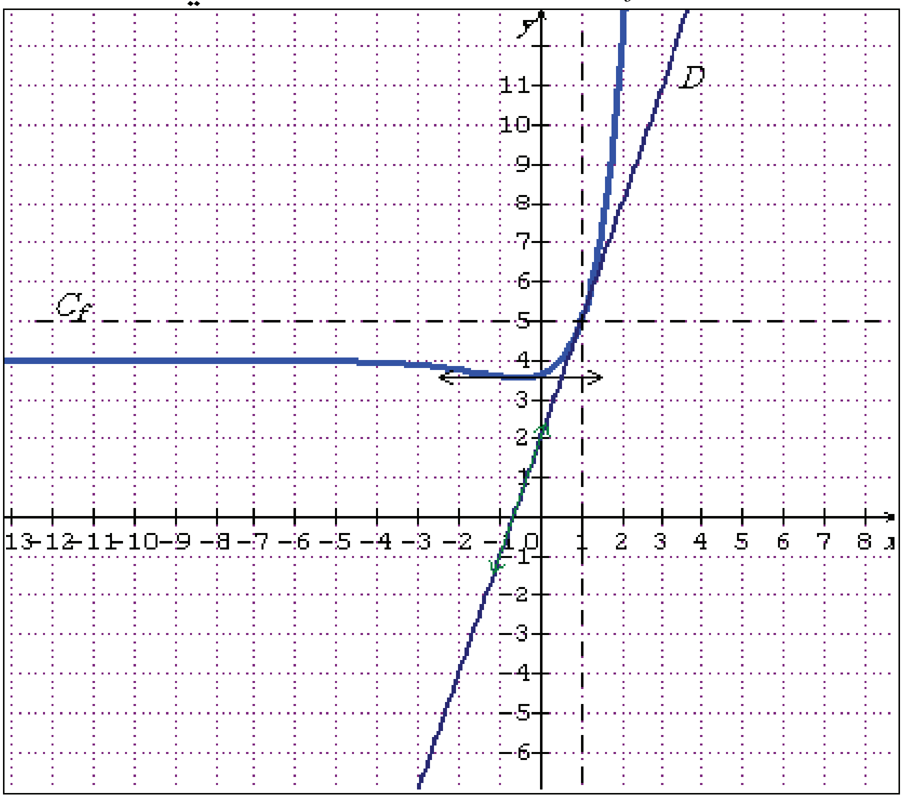
$$I=\int_1^2\frac{1+x}{x^2}dx \quad \text{و} \quad J=\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$$

5) احسب باستعمال مكاملة بالأجزاء التكامل $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$

مسالة

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=(ax+b)e^{x-1}+c$

بحيث $a;b;c$ أعداد حقيقية و $\mathcal{C}_f$ منحنى f ممثل كالتالي :



$\mathcal{C}_f$ يمر من النقطة $A(1;5)$ ويقبل (D) كمماس في النقطة A.

النقطة $B(0;2)$ تنتمي إلى (D) و ζ_f يقبل مماس أفقي في النقطة التي أفصولها $-\frac{1}{2}$.

A. 1) ا- حدد $f(1)$ و $f'(-\frac{1}{2})$

ب- حدد المعامل الموجه للمستقيم (D) و استنتج $f'(1)$

2) بين أن $f'(x)=(ax+a+b)e^{x-1}$ لكل عدد حقيقي x .

3) بين أن $c;b;a$ تحقق النظمة $\begin{cases} a+b+c=5 \\ a+2b=0 \\ 2a+b=3 \end{cases}$ وحدد a; b و c.

B. نضع $f(x)=(2x-1)e^{x-1}+4$

1) ا- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- تحقق أن $f(x)=\frac{2}{e}xe^{x}-\frac{1}{e}e^{x}+4$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ج- استنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. ماذا تستنتج؟

2) ا- احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- ضع جدول تغيرات f و أعط إشارة f(x) لكل x من $\mathbb{R}$.

ج- بين أن المعادلة $f(x)=6$ تقبل حل وحيد α من المجال $[1;2]$.

C. نعتبر الدالة $F(x)=(2x-3)e^{x-1}+4x$

1) بين أن F دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$.

2) احسب مساحة الحيز المحصور ب ζ_f ومحور الافاصيل و المستقيمين $(\Delta_1):x=0$ $(\Delta_2):x=1$.

Bonne chance

2 ف.ك.3
2009/2010

تصحيح الفرض رقم 2 د.2

أسئلة

س1)

$$f(x)=\ln\left(\frac{x^2-x}{x+2}\right)$$

$$x\in D_f \Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x+2}>0, x+2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in \left]-2,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

(1ن) $$\boxed{D_f=\left]-2,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[}$$

س2)

$$D=\mathbb{R}^{+*} \qquad 2\ln^3(x)=3\ln^2(x)-\ln(x)$$

$$\ln(x)(2\ln^2(x)-3\ln(x)+1)=0$$

$\Leftrightarrow \ln(x)=0$ أو $2\ln^2(x)-3\ln(x)+1=0$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=\sqrt{e}$ أو $x=e$

$$\Leftrightarrow S=\{1,\sqrt{e},e\}$$

(1.5) $$\boxed{S=\{1,\sqrt{e},e\}}$$

س3)

$$D=\mathbb{R}^{+*}.\mathbb{R}^{+*} \qquad \begin{cases}2\ln x+\ln y=1\\ 5\ln x+3\ln y=4\end{cases}$$

نضع $X=\ln x, Y=\ln y$

$$\begin{cases}2X+Y=1\\ 5X+3Y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=\ln x=-1\\ Y=\ln y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{e}\\ y=e^3\end{cases}$$

(1.5) $$\boxed{S=\left\{\left(\frac{1}{e},e^3\right)\right\}}$$

س4)

$$\int_1^2\frac{1+x}{x^2}dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx+\int_1^2\frac{1}{x}dx=\left[\frac{-1}{x}+\ln x\right]_1^2=\frac{1}{2}+\ln 2$$

(1ن) $$\boxed{I=\frac{1}{2}+\ln 2}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_1^2 (\frac{1}{x})' e^{\frac{1}{x}} dx = -\left[e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 = e - \sqrt{e}$$

$$\boxed{J = e - \sqrt{e}}$$ (ن1)

س 5) $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$ المكاملة بالأجزاء مرتين تعطي

$$2K = \left[-e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{K = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}$$ (ن2)

مسالة

A .1) ا- $\boxed{f(1) = 5}$ لان A تنتمي الى ζ_f (ن1)

$\boxed{f'(-\frac{1}{2}) = 0}$ لان ζ_f يقبل مماس أفقي في النقطة التي أفصولها $-\frac{1}{2}$

ب- $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3}{-1} = 3}$ لان A و B تنتميان الى ζ_f .

إذن $\boxed{f'(1) = 3}$ (ن1)

2) $f'(x) = (ax + a + b)e^{x-1}$ لكل عدد حقيقي x . (0.5)

3) ζ_f يمر من النقطة $A(1;5)$

و $f'(-\frac{1}{2})=0$ اذن $\begin{cases} a+b+c=5 \\ a+2b=0 \\ 2a+b=3 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}$ (1.5ن)

و $f'(1)=3$

B. 1) $f(x)=(2x-1)e^{x-1}+4$

ا- $\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ (لان $\lim_{x \to +\infty} 2x-1=+\infty, \lim_{x \to +\infty} e^{x-1}=+\infty$) (0.5)

ب- $f(x)=\frac{2}{e}xe^{x}-\frac{1}{e}e^{x}+4$ لكل x من $\mathbb{R}$. (0.5)

ج- $\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad 4$ (0.5)

نستنتج أن ζ_f يقبل مقارب أفقي بجوار ∞- معادلته $y=4$. (0.25)

2) ا- $f'(x)=(2x+1)e^{x-1}$ لكل عدد حقيقي x . (0.75)

ب-

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
f'(x)		-	|	+	
f(x)	↘		$4-\frac{2}{\sqrt{e^3}}$		↗

$4-\frac{2}{\sqrt{e^3}}>0$ اذن $f(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$ (1.5)

ج- نضع $g(x)=f(x)-6$

g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1;2]$ (1ن)

و g(1)=f(1)-6=5-6=-1<0 و g(2)=f(2)-6=3e+4 >0

حسب م.ق.و المعادلة $f(x)=6$ تقبل حل وحيد α من المجال $[1;2]$.

.C $F(x)=(2x-3)e^{x-1}+4x$

1) $F'(x)=((2x-3)e^{x-1}+4x)'=f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

اذن F دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$. (1.5)

2) $\int_0^1 f(x)dx=[F(x)]_0^1=((-1+4)+\frac{3}{e})=3+\frac{3}{e}$

$$A=3+\frac{3}{e}u.a$$

(1.5)

mathyoussef@yahoo.fr