Lycée Abdellah Guennoun - Khémisset
1ère Bac Sciences Economiques et de Gestion
Pr. El arbi Nasiri

Limites d'une fonction

Activité (01) Notion de limite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ *par :* $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

et soit $(\mathscr{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Limite de la fonction f au voisinage de 0

a) *Compléter le tableau suivant :*

x	-10^{-2}	-10^{-4}	-10^{-6}	-10^{-30}	$\to 0 \leftarrow$	10^{-30}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}
$f(x)$									

b) *Que remarque t- on pour les valeurs de* $f(x)$ *lorsque* x *prend des valeurs de plus en plus proches de 0 ?*

Remarque *: si* x *prend des valeurs de plus en plus grandes et positifs on dit que* x *tend vers* $+\infty$.

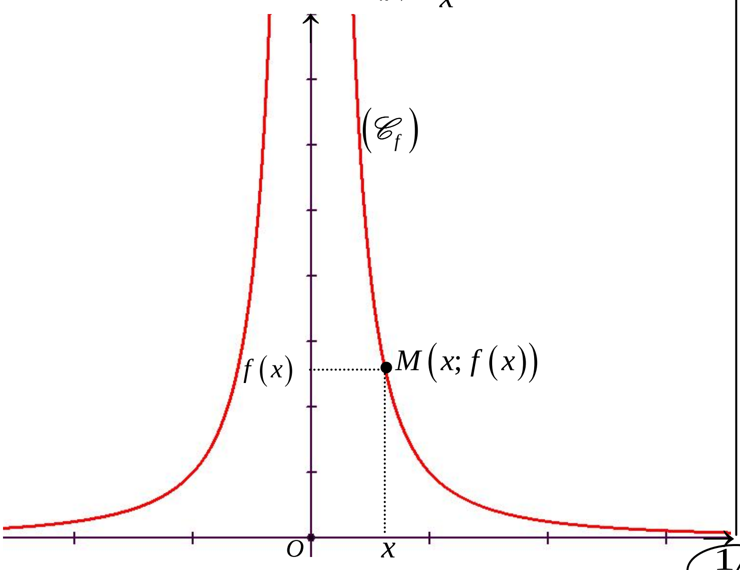
✓ *Si* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers 0, on dit que : la limite de* $f(x)$ *quand* x *tend vers 0 est* $+\infty$ *et on note* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{0} f=+\infty$.

2) *Limite* de la fonction f au voisinage de l'infini.

a) *Que remarque t- on pour les valeurs de* $f(x)$ *lorsque* x *prend des valeurs de plus en plus grandes ?*

✓ *Si* $f(x)$ *tend vers 0 lorsque* x *tend vers* $+\infty$, *on dit que : la limite de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *est 0 et on note* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

b) *Conjecturer la limite:* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}$.



Exercice (01) Reconnaitre une forme indéterminée

Pour chacune des limites suivantes, dire s'il s'agit ou non d'une forme indéterminée et en cas de réponse négative, calculer la limite en utilisant la propriété correspondante :

a) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-x^2}{x+3}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+9}$ f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{x^2+1}{x}$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}}\dfrac{-x^2+x+2}{x+3}$ h) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x+2}$ l) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<1}}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

Exercice (02) Lever une indétermination

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2}{1+x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+x-3}{x^2-x}$

Méthode

✓ *Si on a affaire à une limite du type «*$\dfrac{0}{0}$*» (forme indéterminée), on lève l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur puis en simplifiant la fraction*

✓ *Si on a affaire à une limite du type «*$\dfrac{k}{0}$*» avec* $k\neq0$

- *on distingue les limites à gauche et à droite :* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
- *les limites seront égales à* $+\infty$ *ou* $-\infty$
- *pour déterminer le signe de la limite on étudie le signe du quotient. On peut toutefois se limiter à l'étude de signe au voisinage de a*

Exercice (03) Autres cas d'indétermination

Pour chacune des limites suivantes, lever l'indétermination en utilisant la méthode indiquée :

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ *(factoriser le numérateur par* $x-1$*)*

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ *(factoriser le numérateur et le dénominateur par* $x-1$ *)*

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)$ *(utiliser la formule* $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},a,b>0$ *)*

Exercice (04) Limites et encadrement

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $1 \leq f(x) \leq 2$

Calculer (si cela est possible) les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+x}{x^2 f(x)}$

Exercice (05) Limite du type $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$; $f(a)=g(a)=0$

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$

2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$

Méthode

* *Si f et g deux fonctions polynômes, on factorise* $f(x)$ *et* $g(x)$ *par* $(x-a)$ *(en utilisant la division euclidienne ou…) puis on simplifie*
* *Si f ou g irrationnelle*
 On lève l'indétermination en multipliant et en divisant par l'expression conjuguée

Exercice (06) Limite du type $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{ax^2+bx+c}+ax+b$

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{5x^2+x-1}-2x+1\right)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{5x^2+x-1}+2x+1\right)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x-1}+x\right)$

Méthode

Pour calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right)$

* *Si* $\alpha<0$ *, alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right)=+\infty$
* *Si* $\alpha>0$ *on obtient la F.I du type* "$(+\infty)+(-\infty)$"

 1ère cas *: si* $-\sqrt{a}+\alpha \neq 0$ *on factorise par x :*

$$\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right)=\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\alpha x+\beta$$

$$=|x|\sqrt{\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\alpha x+\beta$$

$$=x\left(-\sqrt{\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)$$

Puisque x tend vers $-\infty$*, donc* $x<0$ *et* $|x|=-x$

 2ème cas *: si* $-\sqrt{a}+\alpha=0$ *on utilise l'expression conjuguée et on factorise (si nécessaire).*

Exercice (07) Limite du type $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{ax+b}+p(x)\right)$

avec $a>0$ et $p(x)$ polynôme de degré supérieur à 1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+5}+2x^4-x-1\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x-1}-3x^2+x+2\right)$

Méthode

* *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=+\infty$ *, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{ax+b}+p(x)\right)=+\infty$
 (Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{ax+b}=+\infty$ *)*
* *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=-\infty$ *on ne peut pas trouver directement la limite, donc Pour la calculer, il faut alors « lever l'indétermination » par exemple en factorisant par x ou le terme le plus haut degré dans* $p(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{ax+b}+p(x)=x\left(\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+\frac{p(x)}{x}\right);(x>0)$$

Exercice (08) Fonction définie par parties

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x^3-\dfrac{1}{8}\ ; x>\dfrac{1}{2} \\ f(x)=1-2x\ ; x\leq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

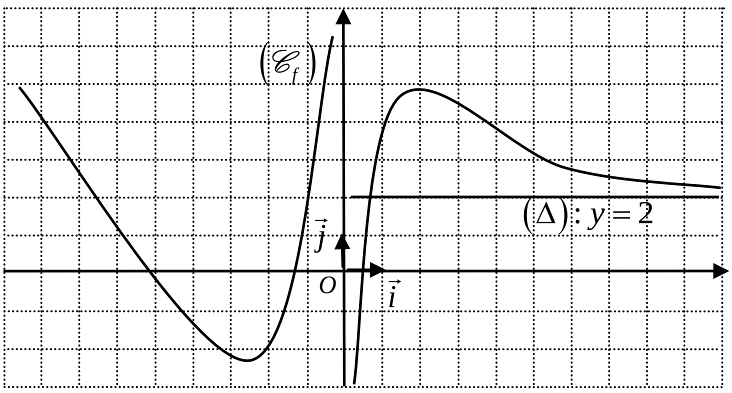
Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$

Exercice (09) La lecture graphique

Soit f la fonction numérique définie par sa représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1) *Déterminer les limites suivantes :*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)-2}$