2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 02	ثانوية موسى بن نصير
مدة الإنجاز : أربع ساعات	الدورة الثانية 2015/2016	نيابة الخميسات
ذ : عبدالله بن الختير		

❖ تمرين رقم 01: (03 نقط)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة :

$$(E): 2x^4 + x - 1 \equiv 0[10] .$$

1)- ليكن x حلا للمعادلة (E) .

أ- بين أن : $x \wedge 10 = 1$ (يمكنك إستعمال مبرهنة بوزو) . 0,5

ب- إستنتج أن : $x \equiv -1[10]$ (يمكنك إستعمال مبرهنة فيرما) . 0,75

2)- حدد مجموعة حلول المعادلة (E) معللا جوابك . 0,5

II- نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}^+$ المعادلة :

$$(F): 2x^4 + x - 1 = 0 .$$

1)- بين أن المعادلة (F) تقبل حلا وحيدا λ في $\mathbb{R}^+$ و أن : $\lambda \in]0,1[$. 0,5

2)- أثبت أن λ عدد لاجذري (يمكنك الإستدلال بالخلف و إستعمال مبرهنة كوص) . 0,75

❖ تمرين رقم 02: (3,75 نقطة)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E): z^2 - 2mz + m^2 + 4 = 0 \text{ ، حيث } m \in \mathbb{C}^* .$$

1)- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . 0,5

2)- نفترض أن : $m = 2e^{i\theta}$ ، حيث $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

- أكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي . 0,75

3)- في كل ما يلي ، نعتبر النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث : $z_1 = m + 2i$ و $z_2 = m - 2i$.

أ- حدد في المستوى العقدي (P) مجموعتي النقط (E_1) و (E_2) بحيث :

$(E_1) = \{M(m) \in (\mathrm{P}) / OM_1 = OM_2\}$ و $(E_2) = \{M(m) \in (\mathrm{P}) / \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}\}$. 0,75

ب- حدد قيم m التي لأجلها يكون المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية و متساوي الساقين في O. 0,5

II- نعتبر التماثل المركزي S الذي مركزه $I(1)$ و ليكن الدوران R الذي مركزه $\Omega(1+i)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و لكل نقطة $M(z)$ من (P) مختلفة عن O نضع : $M' = S(M)$ و $M'' = R(M)$.

1)- بين أن : $z' = -z + 2$ و $z'' = iz + 2$. 0,5

2)- حدد مجموعة النقط $M(z)$ من (P) بحيث تكون النقط $A(2)$ و Ω و M' و M'' متداورة . 0,75

❖ **تمرين رقم 03:** (3,5 نقطة)

⇦ لكل (a,b) من $\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$ نضع : $a*b=e^{(1+\ln a)\times(1+\ln b)-1}$.

1)- بين أن * تبادلي و تجميعي في $\mathbb{R}^{*+}$. 0,5

2)- بين أن * يقبل عنصرا محايدا في $\mathbb{R}^{*+}$ و حدد العناصر القابلة للمماثلة في $\left(\mathbb{R}^{*+},*\right)$. 0,5

3)- أ- بين أن $I=\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ جزء مستقر من $\left(\mathbb{R}^{*+},*\right)$. 0,25

ب- بين أن التطبيق : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^{*+}\to I \\ x\mapsto e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)} \end{array}$ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}^{*+},\times\right)$ نحو $(I,*)$ و حدد تقابله العكسي f^{-1} ، ثم إستنتج بنية $(I,*)$. 0,75

4)- ليكن $x\in I$ ، لكل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ نضع : $f_n(x)=\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\ fois}$.

أ- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right);f_n(x)=e^{(1+\ln x)^n-1}$. 0,5

ب- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right)\left(\exists! u_n\in I\right);f_n(u_n)=e^n$. 0,5

ج- بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$. 0,5

❖ **تمرين رقم 04:** (3,25 نقطة)

⇦ نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix};(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1)- بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),+\right)$. 0,25

2)- أ- بين أن E جزء مستقر من $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times\right)$. 0,5

ب- بين أن التطبيق f الذي يربط كل عدد عقدي $z=a+ib$ بالمصفوفة $M(a-b,b)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(E,\times)$. 0,75

ج- إستنتج بنية $\left(E^*,\times\right)$ ، حيث $E^*=E-\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ (ينبغي تحديد مقلوب كل مصفوفة $M(a,b)$ من E^* . 0,75

3)- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي . 0,25

4)- نعتبر المصفوفتان : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

▪ حل في E المعادلة : $(F):J\times X^3=I$ (لاحظ أن : $-2+2i=(1+i)^3$) . 0,75

❖ تمرين رقم 05: (1,5 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(0)=0 \text{ و } (\forall x\in\mathbb{R}^{*+});f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} .$$

1)- بين أن f متصلة على $\mathbb{R}^+$. — 0,5

2)- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$F(0)=\frac{1}{e} \text{ و } (\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt .$$

- بين أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . — 0,5

3)- أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=n\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}e^{\frac{-n}{k}}$. — 0,5

❖ تمرين رقم 06: (05 نقط)

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$F(0)=0 \text{ و } (\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\mathrm{F}(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{t}e^{\frac{-1}{t}}\,dt .$$

1)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\ln(2)e^{\frac{-1}{x}}\le F(x)\le\ln(2)e^{\frac{-1}{2x}}$. — 0,5

ب- إستنتج النهاية $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ ، ثم اعط التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها . — 0,5

2)- أ- بين أن F متصلة على اليمين في الصفر . — 0,25

ب- أدرس قابلية إشتقاق F على اليمين في الصفر و أول هندسيا النتيجة المحصل عليها . — 0,5

3)- أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\mathrm{F}'(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{-1}{2x}}\left(1-e^{\frac{-1}{2x}}\right)$. — 0,75

ب- حدد رتابة الدالة F على $\mathbb{R}^+$ و ضع جدول تغيراتها . — 0,5

4)- أ- بين أنه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists! a_n\in\mathbb{R}^{*+});F(a_n)=\frac{n}{n+1}\ln(2)$. — 0,5

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\le e^{\frac{-1}{a_n}}\le\frac{n}{n+1}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. — 0,5

ج- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ ، بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ln(n+1)\le S_n\le 2\ln(n+1)$. — 0,5

د- أحسب كل نهاية مما يلي : $\lim_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^k}$ ، حيث $k\in\mathbb{N}^*$. — 0,5

■ **تمارين إضافية:**

❖ تمرين إضافي رقم 01:

⇦ لتكن $(H,*)$ و $(K,*)$ زمرتان جزئيتان لزمرة $(G,*)$.

✓ بين أن $(H\cup K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$ إذا و فقط إذا كان : 1

$K\subset H$ أو $H\subset K$.

❖ تمرين إضافي رقم 02:

⇦ نعرف على $\mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي $\perp$ بما يلي :

$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right);x\perp y=kxy+k'(x+y)$ ، حيث $(k,k')\in\left(\mathbb{R}^*\right)^2$.

✓ حدد الأزواج (k,k') التي يكون لأجلها القانون $\perp$ تجميعيا في $\mathbb{R}$. 0,5

✓ ما هي بنية $(\mathbb{R},\perp)$ في هذه الحالة ؟ علل جوابك . 0,5

❖ تمرين إضافي رقم 03:

⇦ لكل $x\in\mathbb{R}$ ، نضع : $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ و $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

و في $\mathrm{IM}_2(\mathbb{R})$ نعتبر المجموعة الجزئية : $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} ch(x) & sh(x)\\ sh(x) & ch(x)\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}$.

1)- بين أن E جزء مستقر من $(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية . 1

2)- لتكن المجموعة : $H=\left\{N(y)=\dfrac{1}{2y}.\begin{pmatrix}1+y^2 & 1-y^2\\ 1-y^2 & 1+y^2\end{pmatrix}/y\in\mathbb{R}^{*+}\right\}$.

✓ بين أن $H\subset E$ و أن $(H,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$. 1

❖ تمرين إضافي رقم 04:

⇦ لتكن A مصفوفة من $\mathrm{IM}_2(\mathbb{R})$ بحيث :

$A^2+A=6\cdot I_2$ و $A\neq 2\cdot I_2$ و $A\neq -3\cdot I_2$.

و لتكن المجموعة : $E=\left\{M(a,b)=a\cdot A+b\cdot I_2/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1)- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له . 1

2)- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية . 0,5

3)- حل في E المعادلة : $(\Pi):X^2=X$ ، هل الحلقة $(E,+,\times)$ كاملة ؟ 0,5

انتهى الموضوع .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .