NOTIONS DE LOGIQUE

M.Jaber

EXO1 : Donner la négation des propositions :

(A) Le nombre 5 est impair
(B) $\sqrt{7}$ est nombre strictement négatif
(C) Tous les entiers naturels sont premiers
(D) Il y a au moins un réel qui n'est pas un entier
(E) $\forall x \in IR: x^2 - 2 > 0$
(F) $\forall a \in IN, \exists x \in IR: x^2 + 3 > a$

EX02 : Donner les valeurs de vérités des proposions précédentes

EXO3 : Ecrire en utilisant les quantificateurs :
(P) : Il existe un entier naturel plus grand que tous les réels
(Q) : Pour tout réel il existe un rationnel plus petit
(R) :Chaque réel est compris entre deux entiers consécutifs

EXO4 : Donner le tableau de vérité des propositions :

(1) :(P ou Q)et(˥P ou ˥Q)
(2) :(˥P⇒Q)et P

EXO5 : Soit f une fonction numérique, et soit la proposition (P) :f a un signe constant sur IR

1) Donner (P) avec les quantificateurs et les opérations logiques
2) Donner la négation de (P)

EXO6 : Soient P,Q et R trois propositions.

1) Donner le tableau de vérité des propositions :

(A) :(P et Q)⇒R (B) :(P⇒Q)et(Q⇒R)
2) (A) est-elle équivalente à (B) ?

EXO7 : Montrer que $\forall n \in IN: \sqrt{9n^2 + 6n + 2} \notin IN$

EX08 : Soients a et b de IR.
Montrer que :$(a \neq 1\ et\ b \neq 1) \Rightarrow (a + b - ab \neq 1)$

EXO9 : Soient a et b de IR. Montrer que :
$$(|a| < 1\ et\ |b| < 1) \Rightarrow (|a + b| < |1 + ab|)$$

EXO10 : 1)Soient a et b deux réels positifs, montrer que :
a+b=0⇔(a=0 et b=0)
2)En déduire que pour x et y de IR on a :
$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 4} = 4 \Leftrightarrow x = y = 0$$

EXO11 : Montrer les équivalences suivantes :
1)$\forall (a, b) \in (IR^+)^2$:
$$\left(\sqrt{a + 1} - \sqrt{a} < \sqrt{b + 1} - \sqrt{b}\right) \Leftrightarrow (b < a)$$
2)$\forall (a, b) \in (IR^{+*})^2$:
$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{2a + 5b}{5a + 2b} < \frac{b}{a}$$

EXO12 : Résoudre dans IR l'inéquation :
$$\sqrt{2x^2 + 1} > 2x - 4$$

EXO13 : Démontrer que ;
$$\forall y \in [-1,1[; \exists!\, x \in IR^+: \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = y$$

EXO14 : Soit ABC un triangle de cotés a,2a et 3a où a>0
Montrer que ABC ne peut pas être rectangle.

EXO15 : 1) Montrer par disjonction des cas que :
$$\forall n \in IN: E\left(\frac{2n}{3}\right) + E\left(\frac{(n-1)^2}{3}\right) = E\left(\frac{n^2}{3}\right)$$

2)En déduire la valeur de la somme :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} E\left(\frac{2k}{3}\right)$$

EXO16 : Soient a,b,x et y des réels non nuls.
Montrer que : $ax + by = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq a^2 + b^2$

EX017 : Montrer par récurrence que
1)$\forall n \in IN: 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$
2))$\forall n \in IN^*: 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$
3))$\forall n \in IN: 4^n \geq 1 + 3n$
4))$\forall n \in IN: 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7
5))$\forall n \in IN^*: \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

EXO18 : Soit n de IN tel que $n \geq 4$
1)Montrer que $n^2 - 3n$ est un nombre pair
2)Montrer qu'un polygone convexe à n côtés admet $\frac{n^2 - 3n}{2}$ diagonales

EXO19 : Logique et prison
Un prisonnier est mis dans une cellule munie de deux portes, l'une d'elles mène vers la liberté et l'autre vers la mort, le gardien de l'une dit toujours la vérité l'autre ment toujours. On propose au prisonnier de poser une seule question à l'un des gardiens pour savoir la bonne porte, quelle est cette question ?