المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة سوس ماسة درعة
ⵜⴰⴽⴰⴷⵉⵎⵉⵜ ⵜⴰⵏⴳⵎⴰⵎⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ
ⵏ ⵜⵙⴳⴰ ⵏ ⵙⵓⵙ ⵎⴰⵙⵙⴰ ⴷⵔⴰ

درس :
مبادئ في المنطق

1

الثانوية التأهيلية الفتح ـ القليعة

الأستاذ : عادل بناجي

الأولى بكالوريا علوم تجريبية

بطاقة تقنية رقم : 01

الثانوية التأهيلية : الفتح - القليعة - السنة الدراسية : 2015 – 2016 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الأولى باكلوريا علوم تجريبية درس : مبادئ في المنطق التذبير الزمني : 8 ساعات

فقرات الدرس	1 العبارة - الدالة العبارية 2 المكممات 3 العمليات على العبارات 4 القوانين المنطقية 5 الإستدلالات الرياضية
المكتسبات القبلية	المفاهيم التي سبق التطرق إليها في فصول مقررات المستويات السابقة (تعارف ، مبرهنات ، خاصيات) في مختلف الميادين : الهندسة ، الجبر والتحليل ...،
الكفاءات المستهدفة	• التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة ؛ • التمكن من صياغة براهين و استدلالات رياضية واضحة و سليمة منطقيا ؛
التوجيهات التربوية	• ينبغي تقريب العبارات و القوانين المنطقية و طرق الإستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة و مختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ و من وضعيات رياضية سبق له التعامل معها ؛ • ينبغي تجنب البناء النظري و الإفراط في استعمال جداول الحقيقة ؛ • إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه ، كلما سنحت الفرصة لذلك ، بكل فصول المقرر اللاحقة ؛
الوسائل الديداكتيكية	• سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي ؛ • بطاقة و ملخص حول طرق و أنواع الإستدلالات الرياضية ؛

1 العبارة - الدالة العبارية

نشاط

...

1 حدد صحة أو خطاء المعنى الذي تحمله النصوص الرياضية التالية :

$\mathscr{P}_1$: " 3 عدد فردي "

$\mathscr{P}_2$: " الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية "

$\mathscr{P}_3$: " لكل x من $\mathbb{R}$ $x^2<0$ "

2 من بين النصوص السابقة ، هل يوجد نص صحيح و خاطئ في ان واحد ؟

3 هل يمكن تحديد صحة أو خطاء المعنى الذي تحمله النصوص الرياضية التالية :

$\mathscr{Q}(n)$: " العدد $1+2n$ عدد أولي حيث $n\in\mathbb{N}$ "

$\mathscr{R}(x)$: " $x+1\geq 0$ حيث $x\in\mathbb{R}$ "

تعريف

- نسمي **عبارة** كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا أو خاطئا و لايمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في ان واحد .
- نسمي **دالة عبارية** كل نص رياضي يحتوي على متغير أو أكثر ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا المتغير (أو المتغيرات) بقيمة (أو قيم)معينة .

ترميز 1

- نرمز للعبارات بالرموز : $\mathscr{P}$ ، $\mathscr{Q}$ ، $\mathscr{R}$ ...
- نرمز للدوال العبارية بالرموز : $\mathscr{P}(n)$ ، $\mathscr{Q}(x)$ ، $\mathscr{A}(n,m)$ ، $\mathscr{B}(x,y,z)$ ...

تعريف

لتكن $\mathscr{P}$عبارة

- إذا كانت $\mathscr{P}$ صحيحة نقول إن **قيمة حقيقتها صحيحة** و نرمز لذلك بأحد الرمزين Vأو 1 .
- إذا كانت $\mathscr{P}$ خاطئة نقول إن **قيمة حقيقتها خاطئة** و نرمز لذلك بأحد الرمزين F أو 0 .

يمكن تلخيص الحالتين السابقتين في جدول يسمى **جدول حقيقة العبارة** $\mathscr{P}$ و هو كالتالي :

$\mathscr{P}$
V
F

أو

$\mathscr{P}$
1
0

أمثلة

...

- " 3 عدد فردي " : عبارة صحيحة
- " $8=3+6$ " : عبارة خاطئة
- " $4<0$ " : عبارة خاطئة
- " كل مربع هو مستطيل " : عبارة صحيحة
- $B(x,y)$: " $x+y=10$ " : دالة عبارية
  $B(2,5)$: " $2+5=10$ " : عبارة خاطئة
  $B(2,5)$: " $1+9=10$ " : عبارة صحيحة

2 المكممات

نشاط

...

1 حدد قيمة حقيقة العبارات التالية بوضع علامة في الخانة المناسبة :

العبارة	صحيحة	خاطئة
مهما يكن x من $\mathbb{R}$ ، $x^2 \geqslant 0$:	☐	☐
يوجد على الأقل عنصر x من $\mathbb{R}$ بحيث $x<3$:	☐	☐
يوجد عنصر وحيد x من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2=0$:	☐	☐

2 تظهر العبارات السابقة على شكل جمل ، إلا أن لغة المنطق تتيح كتابتها باستعمال أدوات أو رموز خاصة بالمنطق :
هكذا ، إذا رمزنا إلى " مهما يكن" ب $\forall$ و ل "يوجد على الأقل" ب $\exists$ فإن العبارة الأولى تصبح : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 \geqslant 0$
في هذه الحالة نقول إن العبارة مكممة

3 تطبيق : أتمم ملء الجدول التالي باستعمال أحد الرمزين $\forall$ أو $\exists$

العبارة	العبارة المكممة
جمع الأعداد الصحيحة الطبيعية موجبة	
يوجد على الأقل عدد حقيقي x بحيث $x^2-1=0$	
	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2-x \geq 0$
	$(\forall m \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ ,\ m=2n$
بعض الأعداد الحقيقية هي أعداد جذرية	
المعادلة $2x+1=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$	

تعريف

لتكن $(x \in \mathscr{E}, \mathscr{P}(x))$ دالة عبارية مع $\mathscr{E}$ مجموعة معلومة

- الكتابة $(\exists x \in \mathscr{E}, \mathscr{P}(x))$ تعني يوجد على الأقل عنصر من $\mathscr{E}$ يحقق $\mathscr{P}(x)$
- الكتابة $(\forall x \in \mathscr{E}, \mathscr{P}(x))$ تعني أن جميع عناصر $\mathscr{E}$ تحقق $\mathscr{P}(x)$

ترميز

- الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي
- الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني
- نسمي عبارة مكممة كل عبارة تشمل المكممات $\exists$ أو $\forall$

أمثلة 1

...

- $\left(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\right)$ عبارة صحيحة .لأنه من أجل $x = 1$: $1 \in \mathbb{R}$ و $1^2 = 1$
- $\left(\exists! n \in \mathbb{N} : n \geqslant 100\right)$ عبارة خاطئة .لأن $\mathbb{N}$ تضم أكثر من عنصر واحد يحقق المتفاوتة السابقة : مثلا $300 \geqslant 100$
- $\left(\forall x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\right)$ عبارة صحيحة .
- $\left(\forall x \in [0,1] : x < -5\right)$ عبارة صحيحة .

تمرين تطبيقي

...

حدد حقيقة كل من العبارات التالية :

- $P : (\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + 2x - 3 = 0)$
- $Q : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / (x < y)$
- $R : (\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) / (nm = 2007)$

3 العمليات على العبارات

1.3 نفي عبارة

نشاط

- بين أن العبارة $\mathscr{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0$ " خاطئة .
- أعد صياغة العبارة $\mathscr{P}$ للحصول على عبارة $\mathscr{Q}$ صحيحة .

تعريف

نفي عبارة $\mathscr{P}$ هي العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت $\mathscr{P}$ خاطئة ، وتكون خاطئة إذا كانت $\mathscr{P}$ صحيحة .

ترميز

- نرمز لنفي العبارة $\mathscr{P}$ ب $\overline{\mathscr{P}}$ أو $\rceil\mathscr{P}$
- جدول حقيقة نفي عبارة هو كالتالي :

$\mathscr{P}$	$\overline{\mathscr{P}}$
V	F
F	V

ملاحظة

لتحديد نفي عبارة بشكل صحيح ، يجب معرفة نفي الرموز التاية :

الرمز	$\forall$	$\exists$	$=$	$\geqslant$	$\leq$	$>$	$<$
نفيه	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$

تطبيقي تمرين

...

اعط نفي كل عبارة من العبارات التالية :

- $P:"\pi\in\mathbb{Q}"$
- $Q:"\frac{9}{4}\neq\frac{3}{2}"$
- $R:"\sqrt{17}<\sqrt{8}+\sqrt{9}"$
- $S:"(\forall x\in\mathbb{R})(x^2\geqslant 0)"$
- $T:"(\exists n\in\mathbb{N})(n^4=-1)"$

2.3 عطف عبارتين - فصل عبارتين

نشاط

أنقل التعابير التالية إلى دفترك ثم أتمم الفراغات باستعمال إحدى أداتي الربط أو الفصل التاليتين " و " أو " أو " لكي تصبح عبارات صحيحة في كل حالة من الحالات التالية :

1. $x(x-1)=0$ يعني أن $x=1$ .... $x=0$
2. $ABCD$ معين يعني أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ .... $AB=BC$
3. ABC مثلث متساوي الأضلاع يعني أن $AB=AC$ .... $AB=BC$
4. $|x|=3$ يعني أن $x=3$ .... $x=-3$

تعريف

عطف عبارتين $\mathscr{P}$ و $\mathscr{Q}$ هي العبارة التي نرمز لها ب ($\mathscr{P}$ و $\mathscr{Q}$) أو ($\mathscr{P}\wedge\mathscr{Q}$) والتي تكون صحيحة في حالة واحدة فقط : $\mathscr{P}$ و $\mathscr{Q}$ صحيحتان معا و خاطئة في جميع الحالات الأخرى .

تعريف

فصل عبارتين $\mathscr{P}$ و $\mathscr{Q}$ هي العبارة التي نرمز لها ب ($\mathscr{P}$ أو $\mathscr{Q}$) أو ($\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$) والتي تكون خاطئة في حالة واحدة فقط : $\mathscr{P}$ و $\mathscr{Q}$ خاطئتان معا و صحيحة في جميع الحالات الأخرى .

أمثلة

...

- العبارة : (7 عدد فردي و $1+3=4$) صحيحة
- العبارة : ($3 \geq 10$ أو $1+3=4$) صحيحة
- العبارة : ($3 \in \mathbb{N}$ و $5^2=1$) خاطئة
- العبارة : (-2 عدد موجب أو 4 عدد أولي) صحيحة

3.3 استلزام عبارتين

نشاط

1 أدرس صحة العبارات التالية

ا. إذا كان K منتصف $[AB]$ فإن $KA=KB$

ب. إذا كان $KA=KB$ فإن K منتصف $[AB]$

ج. إذا كان K منتصف $[AB]$ فإن $KA+KB=AB$

د. إذا كان $KA+KB=AB$ فإن K منتصف $[AB]$

ه. إذا كان $K \in [AB]$ فإن $KA+KB=AB$

و. إذا كان $KA+KB=AB$ فإن $K \in [AB]$

2 نعطي أسفله بعض العبارات

- $\boxed{IM=IM'}$
- $\boxed{IM+IM'=MM'}$
- $\boxed{I \in [MM']}$
- M' مماثلة M بالتماثل المركزي الذي مركزه I
- I منتصف $[MM']$

أكتب جميع الاستلزامات الصحيحة .

تعريف

استلزام عبارتين $\mathscr{P}$ و $\mathscr{Q}$ في هذا الترتيب هي العبارة التي نرمز لها ب $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ والتي تكون خاطئة في حالة واحدة فقط $\mathscr{P}$ صحيحة و $\mathscr{Q}$ خاطئة و صحيحة في جميع الحالات الأخرى

4.3 تكافؤ عبارتين

تعريف

استلزام عبارتين $\mathscr{P}$ و $\mathscr{Q}$ هي العبارة $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ و $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P})$ و التي تكون صحيحة إذا كانت $\mathscr{P}$ و $\mathscr{Q}$ صحيحتان معا أو خاطئتان معا و تكون خاطئة فيما عدا ذلك . ونرمز لها ب : $\mathscr{Q} \Leftrightarrow \mathscr{P}$

أمثلة

...

- $\left(\sqrt{2} \leqslant 5 \Rightarrow 2 \leqslant\leqslant 25\right)$ عبارة صحيحة
- $\left(5 \notin \mathbb{N} \Rightarrow -5 \in \mathbb{N}\right)$ عبارة صحيحة
- $\left(5 \neq 5 \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}\right)$ عبارة خاطئة
- $\left(3-5 \neq 0 \Leftrightarrow 3 \neq 5\right)$ عبارة صحيحة
- $\left(3^2 = -9 \Leftrightarrow \frac{9}{3} = -3\right)$ عبارة صحيحة
- $\left(cos(0) = 1 \Leftrightarrow sin(0) = 1\right)$ عبارة خاطئة

4 القوانين المنطقية

5 الإستدلالات الرياضية

يعتمد الإستدلال الرياضي على بعض المبادئ و القواعد الأساسية ، كما ترتكز البرهنة على صحة عبارة على القواعد والخاصيات و المبرهنات التي سبق أن بيناها او قبلنا صحتها و كذلك على التعاريف والإصطلاحات المتفق عليها و على القواعد المنطقية .

1.5 الاستدلال الاستنتاجي

تعريف

إذا كانت $\mathscr{P}$ عبارة صحيحة و الاستلزام $\mathscr{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ صحيح فإن العبارة $\mathscr{Q}$ صحيحة .
هذا النوع من الستدلال يسمى : الاستدلال الاستنتاجي

تمرين تطبيقي

ليكن x عنصر من $\mathbb{R}$. بين أن :

$$\left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1\right) \Rightarrow \left(x = \sqrt{3} \quad ou \quad x = -\sqrt{3}\right)$$

2.5 الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس

تعريف

للبرهنة على أن الإستلزام $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ صحيح نبن أن الإستلزام المضاد للعكس $\overline{\mathscr{Q}} \Rightarrow \overline{\mathscr{P}}$ صحيح

ملاحظة

- $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ يسمى الإستلزام العكسي للإستلزام $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
- $\overline{\mathscr{Q}} \Rightarrow \overline{\mathscr{P}}$ يسمى الإستلزام المضاد للعكس للإستلزام $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$

تمرين تطبيقي

بين أن :

$$\forall x, y \in]2, +\infty[: \quad x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$$

3.5 الإستدلال بالتكافؤات المتتالية

تعريف

للبرهنة على أن العبارة $\mathscr{Q} \Leftrightarrow \mathscr{P}$ صحيحة ، نضطر أحيانا إلى البحث عن عبارات أخرى $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$,...., $\mathscr{R}_n$ فنبين أن :
$\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{R}_1 \Leftrightarrow \mathscr{R}_2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \mathscr{R}_n \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ هذا النوع من الإستدلال يسمى **الإستدلال بالتكافؤات المتتالية**

مثال

لنبين أن : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2; a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$
ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{array}{lrcl} \boxed{\mathscr{P}} & a^2 + b^2 = 2ab & \Leftrightarrow & a^2 + b^2 - 2ab = 0 & \boxed{\mathscr{R}_1} \\ & & \Leftrightarrow & (a-b)^2 = 0 & \boxed{\mathscr{R}_2} \\ & & \Leftrightarrow & a - b = 0 & \boxed{\mathscr{R}_3} \\ & & \Leftrightarrow & a = b & \boxed{\mathscr{Q}} \end{array}$$

تمرين تطبيقي

بين أن :

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+)(a+b=0 \Leftrightarrow a=b=0)$$

4.5 الإستدلال بالخلف

تعريف

للبرهنة على أن عبارة $\mathscr{P}$ صحيحة نتبع الخطوات التالية :

• نفترض أنها خاطئة أي $\overline{\mathscr{P}}$ صحيحة

• نبين أن $\overline{\mathscr{P}}$ تستلزم عبارة $\mathscr{Q}$ وهذا يعني أن $\mathscr{Q}$ هي كذلك صحيحة و إذا كانت $\overline{\mathscr{Q}}$ هي أيضا عبارة صحيحة فإن هذا تناقض

• نستنتج أن $\overline{\mathscr{P}}$ عبارة خاطئة أي أن $\mathscr{P}$ عبارة صحيحة

تمرين تطبيقي

نعتبر مثلثا ABC أطوال أضلاعه هي $3a$ و $4a$ و $7a$ حيث $(a>0)$. بين أن المثلث ABC غير قائم الزاوية

5.5 الإستدلال بفصل الحالات

تعريف

للبرهنة على أن العبارة $\mathscr{R} \Rightarrow$ ($\mathscr{P}$أو $\mathscr{Q}$) صحيحة نبين أن العبارة $\mathscr{R} \Rightarrow \mathscr{P}$ صحيحة و كذلك العبارة $\mathscr{R} \Rightarrow \mathscr{Q}$ صحيحة
هذا النوع من البرهان يسمى الإستدلال بفصل الحالات

ملاحظة

عمليا ، غالبا ما تكون العبارة $\mathscr{Q}$ هي $\overline{\mathscr{P}}$ وبالتالي لكي نبين أن $\mathscr{R} \Rightarrow (\mathscr{P}$ أو $\overline{\mathscr{P}})$ يكفي أن نبين أن $\mathscr{R} \Rightarrow \mathscr{P}$ و $\mathscr{R} \Rightarrow \overline{\mathscr{P}}$

مثال

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $|3x-6| = 1$ باستعمال الإستدلال بفصل الحالات .

• نكتب أولا $|3x-6|$ بدون استعمال رمز القيمة المطلقة

لدينا $|3x-6| = 3x-6$ إذا كان $x \geq 2$ و $|3x-6| = -(3x-6)$ إذا كان $x \leq 2$

• نفصل بين حالتين :

إذا كان $x \geq 2$ فإن $|3x-6| = 1 \Leftrightarrow 3x-6 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ ومنه $\mathscr{S}_1 = \{\frac{7}{3}\}$

إذا كان $x \leq 2$ فإن $|3x-6| = 1 \Leftrightarrow 3x-6 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ ومنه $\mathscr{S}_2 = \{\frac{7}{3}\}$

وبالتالى نستنتج أن حلول المعادلة في $\mathbb{R}$ هي : $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$

6.5 الإستدلال بالترجع

تعريف

لتكن دالة عبارية حيث عدد صحيح طبيعي و . للبرهنة على أن العبارة صحيحة نتبع الخطوتين التاليتين :

• **أساس الترجع** : نبين العبارة صحيحة من أجل p_0 (أي $\mathscr{P}(n_0)$ صحيحة)

• **فرضية الترجع** : نفترض أن العبارة صحيحة من أجل الرتبة n (أي $\mathscr{P}(n)$ صحيحة)ونبين أنها صحيحة كذلك من أجل الرتبة $n+1$ (أي $\mathscr{P}(n+1)$ صحيحة).

تمرين تطبيقي

بين بالترجع أن :

1 لكل n من $\mathbb{N}$: $4n^3 - n$ يقبل القسمة على 3

2 لكل n من $\mathbb{N}$: $7^n - 2^n$ يقبل القسمة على 5

جدول بعض الأخطاء الشائعة

الخطأ أو الصعوبة	مصدر الخطأ	سببه	بعض سبل المعالجة

سلسلة تمارين درس : مبادئ في المنطق

التمرين 01

أكتب باستعمال المكممات العبارات التالية ثم ادرس قيمة حقيقتها.

- $\mathscr{P}_1$: " لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي m بحيث $n+m=10$ "
- $\mathscr{P}_2$: " يوجد عدد حقيقي M حيث لكل x من $\mathbb{R}$: $x \leqslant M$ "
- $\mathscr{P}_3$: " لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $x^2+y^2 \geqslant xy$ "
- $\mathscr{P}_4$: " لكل عدد حقيقي a يوجد عدد حقيقي وحيد x بحيث $x^2-ax=1$ "

التمرين 02

حدد نفي العبارات التالية ثم حدد قيمة حقيقة كل واحدة منها.

- $\mathscr{P}_1$: "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x+y>0$"
- $\mathscr{P}_2$: " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x+y>0$ "
- $\mathscr{P}_3$: " $(\forall x \geqslant 0) : x^2-x-2 \geqslant 0$ "
- $\mathscr{P}_4$: " $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{1+x^2}+x \geqslant 0$ "
- $\mathscr{P}_5$: " $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) : x^2+y^2 \neq 1$ "
- P_6 : " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x = sin(y)$ "

التمرين 03

حدد نفي العبارات التالية ثم حدد قيمة حقيقة كل واحدة منها.

- $\mathscr{P}_1$: " $(\forall x \in \mathbb{R}) : (-2<x<1 \Rightarrow |x|<2)$ "
- $\mathscr{P}_2$: " $(\forall x \in \mathbb{R})(|x|<2 \Rightarrow -2<x<1)$ "
- $\mathscr{P}_3$: " $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x^2=5x-6 \Rightarrow x=2 \wedge x=3)$ "
- $\mathscr{P}_4$: " $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : (|x|<|y| \Rightarrow x<y)$ "

التمرين 04

بين أن العبارتين التاليتين صحيحتين .

1. $(\forall (x,y,z,t) \in (\mathbb{R}^+)^4) : xz>yt \Rightarrow x>y$ أو $z>t$
2. $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) : x \neq y \Rightarrow x^3+x \neq y^3+y$

التمرين 05

1. ليكن $a \in \mathbb{R}^+$ بحيث : $(\forall \varepsilon>0) : a<\varepsilon$ بين أن $a=0$
2. ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $(\forall \varepsilon>0) : |b-a|<\varepsilon$ بين أن $a=b$

التمرين 06

1. بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: (n مضاعف للعدد 3) $\Leftrightarrow$ (n^2 مضاعف للعدد 3)
2. ثم استنتج أن : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

التمرين 07

1. بين أن : $(\forall x \geqslant 0)\ (\forall y \geqslant 0)\left(x+y=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ و } y=0 \right)$
2. $\left(a \geqslant 1 \text{ و } b \geqslant 1\right) \Rightarrow \sqrt{ab} \geqslant \sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}$
3. $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) : (a+\sqrt{a^2+1})(b+\sqrt{b^2+1}) \Leftrightarrow a+b=0$
4. حل في $\mathbb{R}^2$ كل من المعادلتين : $(E_1) : x^2+y^2 = y-\frac{1}{4}$ و $(E) : x+y+6=2(\sqrt{x+1}+2\sqrt{y})$

التمرين 08

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $|x|+|x+1|+|x+2|=5$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\sqrt{x^2-3x+2}>x-2$

✌ التمرين 09 ✌

بين باستعمال البرهان بالترجع مايلي :

1 لكل n من $\mathbb{N}$: $4n^3-n$ يقبل القسمة على 3

2 لكل n من $\mathbb{N}$: 7^n-2^n يقبل القسمة على 5

3 $(\forall x\in\mathbb{R}-1)(\forall n\in\mathbb{N}^*): 1+x+x^2+x^3+\ldots+x=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

4 $(\forall n\in\mathbb{N}^*): 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5 $(\forall n\in\mathbb{N}): (n\geqslant 4\Rightarrow 2^n\geqslant n^2)$

✌ التمرين 10 ✌

لتكن a و b و c ثلاث أعداد حقيقية بحيث $abc\neq 0$ و $ab+bc+ca=0$. بين أن : $a+b+c\neq 0$

✌ التمرين 11 ✌

لتكن x و y و z ثلاث أعداد حقيقية

1 بين أن $x^2+y^2\geqslant 2xy$ ثم استنتج أن $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$

2 بين أن $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^*)(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz$

✌ التمرين 12 ✌

لتكن a و b و c ثلاث أعداد حقيقية موجبة قطعا .

1 بين أن : $\dfrac{a^2}{a+b}\geqslant\dfrac{3a-b}{4}$

2 استنتج أن : $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}\geqslant\dfrac{a+b+c}{2}$