Exercice 1 : 10pts

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 9}{u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer U_1 et U_2 . **(1pt)**
2. Montrer par récurrence que $u_n \prec 3$ pour tout n de IN . **(1,5pts)**
3. a. Montrer que : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 3)^2}{5 - U_n}$ pour tout n de IN . **(1pt)**

   b. Montrer que (U_n) est croissante puis déduire qu'elle est convergente. **(1pt)**
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{-2u_n + 4}{u_n - 3}$ pour tout n de IN .

   a. Calculer V_0 . **(1pt)**

   b. Montrer que $(\forall n \in IN) V_{n+1} = \dfrac{-U_n + 1}{U_n - 3}$,puis déduire que (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$. **(1,5pts)**

   c. Exprimer V_n en fonction de n. **(1pt)**

   d. Montre que $(\forall n \in IN) U_n = \dfrac{3V_n + 4}{V_n + 2}$ puis déduire que $U_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$. **(1pt)**

   e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. **(1pt)**

Exercice 2 : 10pts

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1 \, et \, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Calculer U_1 et U_2 . **(1pt)**
2. Montrer par récurrence que $u_n \succ \dfrac{1}{2}$ pour tout n de IN . **(1,5pt)**
3. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)$ **(1pt)**

   b. Montrer que (U_n) est décroissante puis déduire qu'elle est convergente. **(1pt)**
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout n de IN .

   a. Calculer V_0 . **(1pt)**

   b. Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison. **(1pt)**

   c. Calculer V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$. **(1,5pt)**

   d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(1pt)**

   e . Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_{n-1}$ **(1pt)**

Celui qui trahit une seule fois ses principes perd la pureté de sa relation avec la vie. « Andreï Tarkovski »