

التمرين 1:

حدد في المستوى العقدي المجموعات التالية :

$$G = \left\{ M(z)/z - \bar{z} = 2i|z| \right\} , \quad F = \left\{ M(z)/z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\} , \quad E = \left\{ M(z)/z + \frac{1}{z} \in i\mathbb{R} \right\}$$

التمرين 2:

1. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون العدد $1+i$ حلا للمعادلة $z^2 - az + b = 0$.

2. نضع $z = \frac{a-3i}{\sqrt{3}+bi}$. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث $|z|=2$ و $\arg z \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

التمرين 3:

نعتبر أعدادا عقدية a و b و c حيث : $a+b+c=abc=1$ و $|a|=|b|=|c|=1$

1. بين أن $ab+bc+ca=1$

2. حدد $a^2+b^2+c^2$ و $a^3+b^3+c^3$



التمرين 4:

ليكن a و b عددين عقديين .

1. بين أن : $(a+b+i|a-b|)(a+b-i|a-b|) = 2(|a|^2 + |b|^2)$

2. بين أن : $|(a+b)^2| - |(a-b)^2| = 4\operatorname{Re}(a\bar{b})$

التمرين 5:

نعتبر في C المعادلة التالية: $z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2i\bar{u} = 0$ حيث u عد عقدي معلوم وغير منعدم .

1. حدد في المجموعة C حلي المعادلة .

2. في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

نعتبر النقط M و M' و M'' التي الحاقها على التوالي هي : u ، $z' = -i\bar{u}$ ، $z'' = 2u$.

أبين أن النقط M و M' و M'' مستقيمة اذا وفقط اذا كان $|\operatorname{Re}(u)| = |\operatorname{Im}(u)|$.

ب. نفترض أن $|\operatorname{Re}(u)| \neq |\operatorname{Im}(u)|$.

بين ان المثلث OMM' متساوي الساقين .

التمرين 6:

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية :

$$z_5 = 1 - i , \quad z_4 = 1 + \sqrt{7} , \quad z_3 = -\sqrt{3} + 1 , \quad z_2 = -3i , \quad z_1 = 3i$$

$$z_{10} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(2-2i)^3} , \quad z_9 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{i-1} \right)^{12} , \quad z_8 = \frac{-2+2i}{1-i\sqrt{3}} , \quad z_7 = 2i(i-\sqrt{3}) , \quad z_6 = 1+i\sqrt{3}$$

التمرين 7:

ليكن θ عنصرا من المجال $[0, 2\pi]$.

اكتب على الشكل المثلثي كلا من الأعداد العقدية التالية :

$$z_2 = 1 - \cos\theta + i\sin\theta , \quad z_1 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z_4 = 1 + \cos\theta - i\sin\theta , \quad z_3 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$$

التمرين 8:

ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi, \pi]$.

1. حدد العدد $z = -1 + e^{i\theta}$ على الشكل المثلثي.

2. استنتج عمدة ومعيار العدد العقدي $u = \sqrt{3} - 2 + i$.



<http://www.vrac-colorpages.net>

التمرين 9:

نعتبر العدد العقدي $u = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

1. حدد العدد العقدي u^2 على الشكل المثلثي.

2. استنتج u على الشكل المثلثي.

التمرين 10:

ليكن z عددا عقديا بحيث $\text{Im}(z) > 0$. بين أن $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1$

التمرين 11:

حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون العدد العقدي $1 + 3i$ حلا للمعادلة $z^2 - az + b = 0$.

التمرين 12:

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. نضع $a = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$ و $b = \frac{-1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta + i \sin \theta}$

1. اكتب كلا من العددين a و b على الشكل المثلثي.

2. حدد الجذور من الرتبة الرابعة للعدد a .

3. اعط على الشكل الجبري حلول المعادلة: $z \in \mathbb{C}; \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^4 = 2$

التمرين 13:

لكل z عدد عقدي مخالف للعدد (-1) . نضع $f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$

1. أ. حدد العقدي y بحيث $f(iy) = iy$

ب. حل في C المعادلة $f(z) = z$ (E).

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث $R(z_0) = 0$ و $R(z_1) > R(z_2)$

2. أ. تحقق أن $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب. استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2 .

3. نضع $z = e^{i\alpha}$ حيث $0 \leq \alpha < \pi$

أ. بين أن $f(z) = izf(z)$

ب. حدد α إذا علمت أن $f(z) + \overline{f(z)} = 0$

ج. اكتب $f(z)$ على الشكل الأسّي.

4. حدد z إذا علمت أن $\text{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}$ و $|z| = 1$



<http://www.vrac-colorpages.net>

التمرين 14:

1. بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : \arg(1+ix) \equiv \arctan(x)$

2. ليكن (α, β) عنصرا من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

حدد معيار وعمدة العدد العقدي $\alpha \frac{1+i\beta}{1-i\beta}$.



التمرين 15:

1. بين أن $(\forall z \in \mathbb{R}) : |z+1| = |z|+1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$

2. ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين.

بين أن: $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \pmod{\pi}$

التمرين 16:

ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم. نعتبر العدد العقدي: $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

نضع: $S = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ و $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

1. اكتب S على الشكل الجبري.

2. استنتج أن: $S_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$

3. احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين 17:

لكل عدد عقدي z نضع $P(z) = z^2 - (2+6i)z$

1. حل في C المعادلة $P(z) = 4 - 6i$

2. نضع: $u = 1+5i$ و $v = 1+i$ و $w = 239-i$ و $a = \arctan \frac{1}{5}$ و $\beta = \arctan \frac{1}{239}$

أ. تحقق أن: $u^4 v = 4w$

ب. حدد عمدة للعدد u بدلالة α و عمدة للعدد w بدلالة β

ج. استنتج أن: $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$



<http://www.vrac-coloriages.net>

التمرين 18:

ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $]0, 2\pi[$. نضع $u = e^{i\theta}$

1. حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي z الذي يحقق $u = \frac{z-i}{z+i}$

2. نعتبر في C المعادلة: $(E): (z^2+1)^n - (z+i)^{2n} = 0$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

أ. تحقق أن $(-i)$ حل للمعادلة (E)

ب. حل المعادلة (E).



التمرين 19:

نعتبر العدد العقدي $z = e^{i\alpha}$ حيث α عنصر من $]\pi; 0[\cup]0; \pi[$.

1. حدد بدلالة α معيار وعمدة العددين العقديين $1+z$ و $z-1$.

2. نفترض أن $\alpha = \frac{2\pi}{1+2n}$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم.

أ. بين أن: $\frac{2}{1+2n} \leq |1+z|$ ثم استنتج أن $\sum_{k=0}^{2n} (-z)^k = \frac{2}{1+z}$.

ب. بين أن: $\frac{1}{1+2n} \leq \cos \frac{\pi}{1+2n}$.

3. نفترض أن $0 < \alpha < \pi$. نضع $Z = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$.

بين أن $\bar{Z} = \frac{1+z}{(1-z)^2}$ ثم حدد معيار وعمدة Z بدلالة α .

4. لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ في المستوى العقدي عندما يتغير α في المجال $]0; \pi[$.

أ. اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (E) .

ب. أنشئ المجموعة (E) .

التمرين 20:

لكل عدد عقدي غير منعدم z نضع: $f(z) = \frac{z^2 + 4i}{z}$.

1. تحقق أن $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(z) = (1 + \sqrt{3})(1 + i)$; $z \in \mathbb{C}$. استنتج الحل الثاني.

2. نضع $u = 2e^{-i\frac{\pi}{12}}$. حدد $f(u)$ على الشكل المثلثي.

3. في المستوى العقدي نعتبر النقط O و A و B التي أحاقها على التوالي 0 و z_1 و z_2 .

أ. بين أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O .

ب. حدد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB})$.

التمرين 21:

ليكن a في \mathbb{C}^* . نضع $z_1 = -\bar{j}(z-a) + a$ و $z_2 = \bar{j}(z+a) - a$ حيث $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

في المستوى العقدي A و B و M_1 و M_2 و M نقط أحاقها على التوالي a و $(-a)$ و z_1 و z_2 و z .

لتكن (C) الدائرة التي مركزها O وشعاعها $|a|$.

1. نفرض أن $M \neq A$.

أ. بين أن: $\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = -\frac{a+z}{a-z} i\sqrt{3}$.

ب. بين أنه إذا كانت $M \in (C)$ فإن M و M_1 و M_2 مستقيمة.

ج. بين أنه إذا كانت M و M_1 و M_2 مستقيمة فإن $M \in (C)$.

2. نضع $z' = \frac{au - \bar{u}z}{a-z}$ حيث u عدد عقدي يحقق $\text{Im}(u) \neq 0$ و $z \neq a$.

بين أن $M(z) \in (C) \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}$.

تقديم: ذ. العربي الوظيفي



التمرين 22:



لكل عدد عقدي z من $C - \{i\}$ نضع : $f(z) = \frac{iz - 1}{iz + 1}$

1. حل في C المعادلة : $f(z) = z$

2. حدد المجموعة $E = \{ M(z)/f(z) = f(\bar{z}) \}$

3. أبين أن لكل z من $C - \{i\}$: $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

ب. بين أن لكل z من $C - \{i\}$: $|f(z)| < 1 \Leftrightarrow \text{Im}(z) < 0$

ج. حدد وانشئ مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|f(z)| < 1$ و $f(z) \in i\mathbb{R}$

التمرين 23:

لتكن (Z_n) متتالية الأعداد العقدية المعرفة بما يلي : $Z_0 = \cos x + i \sin x$ و $Z_{n+1} = Z_n + |Z_n|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)
حيث x عنصر من المجال $]0; \pi/2[$.

1. أكتب على الشكل المثلي العدد Z_1 .

2. لتكن (α_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\alpha_n \in]0; \pi/2[$ و $\alpha_n \equiv \arg Z_n \pmod{2\pi}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

أ. بين أن المتتالية (α_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

ب. استنتج (α_n) بدلالة x

3. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $v_n = Z_n - \bar{Z}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

أ. عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج.

ب. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) |Z_n| = \frac{\sin x}{\sin(x/2^n)}$

4. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) Z_n - Z_0 = |Z_0| + |Z_1| + \dots + |Z_{n-1}|$

5. استنتج أنه لكل n من \mathbb{N}^* : $\cotan \frac{x}{2^n} - \cotan x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x/2)} + \dots + \frac{1}{\sin(x/2^{n-1})}$



التمرين 24:

ليكن a عددا عقديا و n عددا صحيحا طبيعيا يخالف 0 و 1.

نعتبر المعادلة (E) : $(z - a)^n = (z - \bar{a})^n$

1. بين أن صور حلول المعادلة مستقيمة.

2. ليكن z حلا للمعادلة (E).

بين أن $z = \text{Re}(a) - \text{Im}(a) \cdot \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ حيث k عدد طبيعي بحيث $1 \leq k \leq n-1$.



التمرين 25:

ليكن a عددا تخيليا صرفا و n عددا من N بحيث $n \geq 2$. نعتبر المعادلة: (E) $(z+a)^n - (a-\bar{z})^n = 0$

1. لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E). بين أن $z \in S \Rightarrow z \in R$.

2. حل في C المعادلة (E).

3. نعتبر المعادلة (F): $(z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n = 0$ حيث $\alpha \neq 2k\pi$ و $k \in Z$.

أ. بين ان حلول المعادلة (F) تنتمي الى R .

ب. حل في C المعادلة (F).

4. نضع $P(z) = (z+i)^n - e^{i\alpha}(z-i)^n$.

أ. حدد درجة الحدودية P .

ب. نضع: $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. حدد a_0 بدلالة α .

ج. ليكن z_1 و z_2 و و z_n حلول المعادلة $P(z) = 0$. بين ان: $z_1 \times z_2 \times \dots \times z_n = (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n}$.

د. استنتج ان $(\forall p \in N^*) \prod_{k=1}^{2p+1} \cotan\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{4p+2}\right) = (-1)^p \cotan\frac{\alpha}{2}$



http://www.vrac-colorpages.net



التمرين 26:

لكل z من $C - \{-1\}$. نضع $u = \frac{iz^2}{z+1}$. نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث يكون u عددا تخيليا صرفا

1. أ. بين ان: $[z = \bar{z}]$ او $[|z|^2 + 2\text{Re}(z) = 0]$ و $(z \neq -1)$ $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow$

ب. حدد و انشئ (Γ) .

2. نضع $z = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi, \pi[$.

أ. حدد الشكل المثلثي للعدد u .

ب. بين ان للنظمة $\begin{cases} z = e^{i\theta} \\ u \in iR \end{cases}$ ثلاث حلول صورها في المستوى العقدي تكون مثلث متساوي الاضلاع.

التمرين 27:

نعتبر التطبيق f من المستوى P نحو P المعرف بما يلي: $(\forall z \in C): f(z) = z\left(\frac{\bar{z}}{z} + 2\right)$

1. احسب العدد $f(\sqrt{2}e^{i\alpha})$ حيث α عنصر من المجال $[0, 2\pi[$.

2. حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $f(z) \in R$.

3. في المستوى العقدي المنسوب إلى M م (O, \bar{u}, \bar{v}) نعتبر النقطتين $M(z)$ و $M'(f(z))$.

أ. بين أن $\overline{MM'}$ و \bar{u} مستقيمتان إذا وفقط إذا كان $(|z|=1)$ أو $(z \in R)$.

ب. نفترض أن $|z|=1$. لتكن N النقطة التي يكون من أجلها $OMM'N$ متوازي الأضلاع.

بين أن: $MN = M'N = 1$.

4. نعتبر العدد العقدي $a = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

أ. حل في C : $2z^2 - az + 1 = 0$.



ب. استنتج أنه توجد نقطة وحيدة $M(z)$ من الدائرة المثلثية حيث $f(z) = a$ **تقديم: ذ. العربي الوظيفي**

التمرين 28:

ليكن θ حقيقياً من $]-\pi/2 ; 3\pi/2[- \{\pi/2\}$. نضع $u = e^{i\theta}$.

1. اتحقق أن: $u \neq -i$ و $u \neq i$.

ب. حدد معيار وعمدة لكل من العددين $(1+iu)$ و $(-1+iu)$.

2. نفترض أن $\theta = \frac{-\pi}{8p+6}$ حيث p عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

$$\sum_{k=0}^{4p+2} (iu)^k = \frac{-2}{-1+iu}$$

ب. استنتج أن: $|-1+iu| \geq \frac{2}{4p+3}$.

ج. بين أن: $\sin \frac{(2p+1)\pi}{8p+6} \geq \frac{1}{4p+3}$.

3. نفترض في هذا السؤال أن $\theta \in]-\pi/2 ; \pi/2[$. نضع $f(u) = \frac{u(u-i)}{(u-i)^2}$.

$$\bar{f}(u) = \frac{1+iu}{(-1+iu)^2}$$

ب. اكتب $\bar{f}(u)$ ثم $f(u)$ على الشكل المثلي.

ج. لتكن Γ مجموعة النقط $M(f(u))$ حيث θ يتغير في $]-\pi/2 ; \pi/2[$.

بين أن Γ هي منحنى الدالة ϕ المعرفة على المجال $]-\infty ; 0[$ بما يلي: $\phi(x) = -\sqrt{\frac{|x|}{2}}$.

التمرين 29:

لتكن a و b و c أعداداً عقدية صورها على التوالي في المستوى العقدي هي النقط A و B و C .

نعتبر الدوران $r\left(C, \frac{\pi}{3}\right)$. نضع $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. احسب j^3 واستنتج j^n لكل n من N ثم احسب $\sum_{k=0}^{2010} j^k$.

2. تحقق أن $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ و $1+j+j^2=0$.

3. أثبت أن الكتابة العقدية للدوران r هي: $z' = -j^2z - jc$.

4. أبين أن ABC متساوي الأضلاع يكافئ $(a+jb+j^2c=0$ أو $a+j^2b+jc=0)$.

ب. نعتبر النقطتين $E(z)$ و $F(j)$. حدد قيم z بحيث يكون المثلث OEF متساوي الأضلاع.

التمرين 30:

1. نعتبر العدد العقدي $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. نضع: $\alpha = z_0 + z_0^4$ و $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

أ. بين أن: $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=0$.

ب. استنتج أن α و β هما حل المعادلة $(E) X^2+X-1=0$.

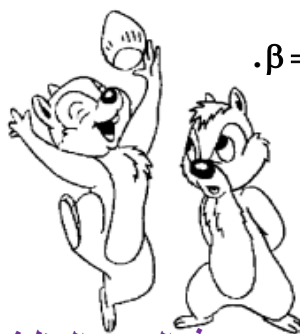
ج. حدد α بدلالة $\cos \frac{2\pi}{5}$.

د. حل المعادلة (E) ثم استنتج قيمة $\cos \frac{2\pi}{5}$.

2. مثل النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 صور 1 و z_0 و z_0^2 و z_0^3 و z_0^4 على المستوى العقدي.



http://www.vrac-coloriages.net



تقديم: ذ. العربي الوظيفي