التمرين الأول : (3 نقط)

تذكير :

✓ $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

✓ $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ فضاء متجهي حقيقي.

نضع $V=\left\{M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1. (*) لدينا :

✓ $V\neq\varnothing$ ، لأن : $O=M_{(0,0)}\in V$.

✓ $V\subset\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

✓ لكل عنصرين $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ من V ولكل (α,β) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا :

$$\alpha M_{(a,b)}+\beta M_{(c,d)}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c&\alpha b+\beta d\\4(\alpha b+\beta d)&\alpha a+\beta c\end{pmatrix}=M_{(\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta d)}\in V$$

ومنه فإن V فضاء متجهي جزئي من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,.\right)$.

(*) لكل عنصر $M_{(a,b)}$ من V ، لدينا : $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}=aI+bJ$ ، حيث :

$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=M_{(1,0)}\in V$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}=M_{(0,4)}\in V$. إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء V .

لكل (α,β) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا : $\alpha I+\beta J=O\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\4\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha=\beta=0$. إذن (I,J) أسرة حرة في V . وبالتالي فإن (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(V,+,.)$. (بعده $\dim V=2$)

2. أ- ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصران من V. لدينا :

$$M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c&d\\4d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+4bd&ad+bc\\4(ad+bc)&ac+4bd\end{pmatrix}=M_{(ac+4bd,ad+bc)}\in V$$

إذن V جزء مستقر من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

2. ب- لدينا :

✓ $(V,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي. إذن $(V,+,.)$ زمرة تبادلية.

✓ $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة ، إذن $\times$ تجميعي وتوزيعي على $+$ في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ و بما أن V جزء مستقر من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$ ، فإن $\times$ تجميعي وتوزيعي على $+$ في V.

✓ I هي وحدة الحلقة $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ و $I=M_{(1,0)}\in V$ ، إذن I هي وحدة V.

✓ $M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}=M_{(ac+4bd,ad+bc)}=M_{(ca+4db,da+cb)}=M_{(c,d)}\times M_{(a,b)}$. إذن $\times$ قانون تبادلي في V.

خلاصة : $(V,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية.

3. أ- لدينا : $O=M_{(0,0)}=M_{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+4\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}\right)}=M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)}$.

ب- لدينا : $O=M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)}$ و $M_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)}\neq O$ و $M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}\neq O$. إذن $(V,+,\times)$ حلقة غير كاملة لاحتوائها على قواسم الصفر ، ومنه فإن الحلقة $(V,+,\times)$ ليست جسما.

4. لتكن X مصفوفة من V حيث $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ مع $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

أ- لدينا :

$$\begin{aligned} X^2-2aX+\left(a^2-4b^2\right)I &= M_{(a,b)}^2-2aM_{(a,b)}+\left(a^2-4b^2\right)M_{(1,0)} \\ &= M_{\left(a^2+4b^2,2ab\right)}-M_{\left(2a^2,2ab\right)}+M_{\left(a^2-4b^2,0\right)} \\ &= M_{(0,0)} \\ &= O \end{aligned}$$

ب- نفترض أن $a^2-4b^2\neq 0$. إذن : $X^2-2aX+\left(a^2-4b^2\right)I=O \Rightarrow \dfrac{1}{a^2-4b^2}(2aI-X)X=I$.

ولدينا : $\dfrac{1}{a^2-4b^2}(2aI-X)=\dfrac{1}{a^2-4b^2}\left(2aM_{(1,0)}-M_{(a,b)}\right)=M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2},\frac{-b}{a^2-4b^2}\right)}\in V$.

إذن X تقبل مقلوبا في $(V,+,\times)$ هو : $\boxed{X^{-1}=\dfrac{1}{a^2-4b^2}(2aI-X)=M_{\left(\frac{a}{a^2-4b^2},\frac{-b}{a^2-4b^2}\right)}}$.

التمرين الثاني :

ليكن u عددا عقديا مخالفا للعدد $1-i$.

1. أ- $(iu-1-i)^2=-u^2+2(1-i)u+2i$.

ب- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)\colon\ z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$.

لنحسب المميز المختصر للمعادلة $(*)$. حسب السؤال أعلاه ، لدينا :

$$\Delta'=(u+1-i)^2-\left(2u^2-4i\right)=-u^2+2(1-i)u+2i=(iu-1-i)^2$$

إذن للمعادلة $(*)$ حلين مختلفين هما : $z_1=u+1-i+iu-1-i=\boxed{(1+i)u-2i}$

و $z_2=u+1-i-iu+1+i=\boxed{2+(1-i)u}$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $(*)$ هي : $S=\left\{(1+i)u-2i\ ,\ 2+(1-i)u\right\}$.

2. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر ، نعتبر النقط $A\left((1+i)u-2i\right)$ و $B\left((1-i)u+2\right)$ و $U(u)$ و $\Omega(2-2i)$.

أ- لدينا I منتصف القطعة $[AB]$. إذن لحق النقطة I هو :

$$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{(1+i)u-2i+(1-i)u+2}{2} = \boxed{1-i+u}$$

t هي الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ التي تحول النقطة U إلى النقطة I . لنحدد لحق المتجهة $\vec{u}$. لدينا :
$z_{\vec{u}} = z_I - z_U = 1-i+u-u = \boxed{1-i}$. إذن : $\vec{u}(1,-1)$.

ب- الكتابة العقدية للدوران R الذي مركزه $\Omega(2-2i)$ وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ هي : $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z + \left(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)z_{\Omega}$. أي :
$z' = -iz + (1+i)(2-2i)$. يكافئ $\boxed{z' = -iz+4}$.

وبما أن $-iz_A+4 = -i\left((1+i)u-2i\right)+4 = (1-i)u+2 = z_B$ ، فإن $\boxed{R(A)=B}$.

جـ- لدينا $R\left(\Omega,-\frac{\pi}{2}\right)(A)=B$. إذن : $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ و $\Omega A = \Omega B$. ومنه فإن ΩAB مثلث قائم الزاوية في Ω ولدينا I منتصف القطعة $[AB]$. $\boxed{(\Omega I)\perp(AB)}$.

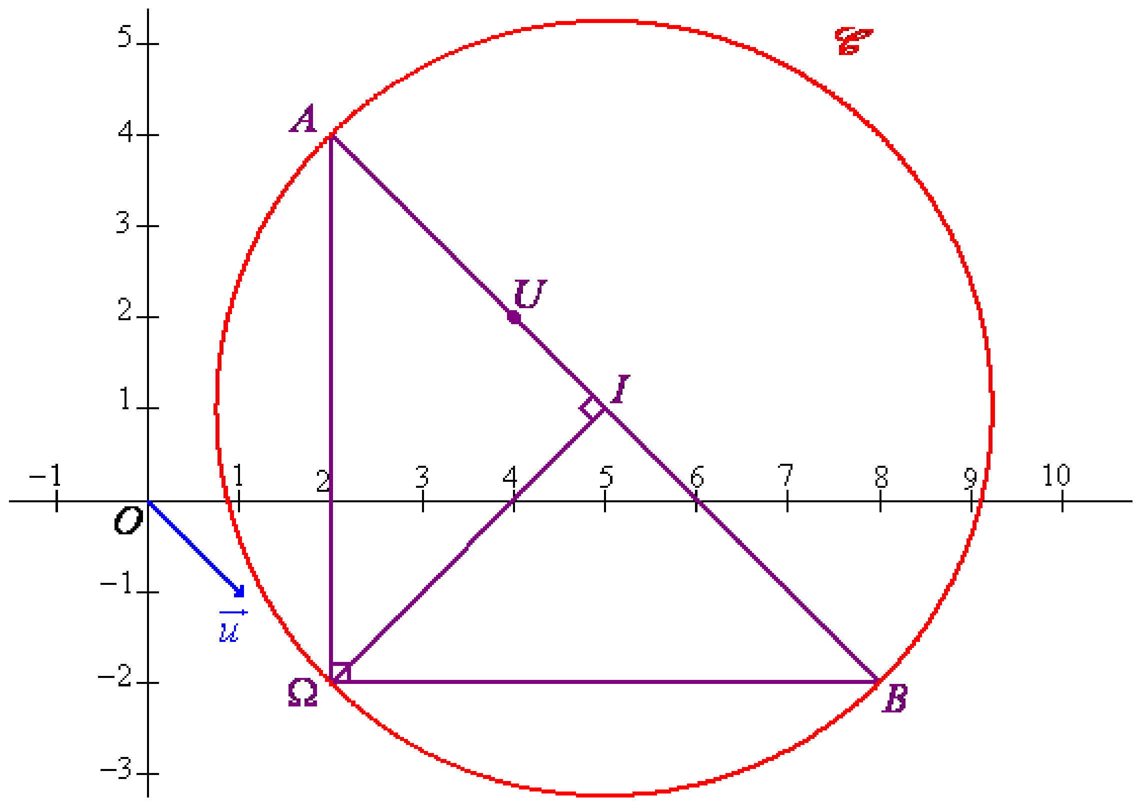
د- إنشاء النقطتين A و B انطلاقا من النقطة U :

✓ لدينا : $t(U)=I$ ، هكذا ننشئ النقطة I بحيث : $\overrightarrow{UI}=\vec{u}$.

✓ بما أن $(\Omega I)\perp(AB)$ ، فإن النقطتين A و B تنتميان إلى المستقيم (Δ) المار من النقطة I و العمودي على المستقيم (ΩI) .

✓ بما أن ΩAB مثلث قائم الزاوية في Ω و I منتصف القطعة $[AB]$ ، فإن I هو مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المحيطة بالمثلث ΩAB . إذن A و B هما نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والدائرة $\mathscr{C}$. ويتم اختيار النقطتين A و B بحيث يكون ΩAB مثلثا غير مباشر $\left(\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right)$.

إنشاء الشكل في حالة $U(4+2i)$:



3. نضع : $u=a(1+i)-2i$ حيث $(a\in\mathbb{R})$.

أ- لنحدد لحقي المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AU}$ بدلالة a :

$$Aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=z_B-z_A=(1-i)u+2-(1+i)u+2i=\boxed{2(1-i)(a-1)}$$

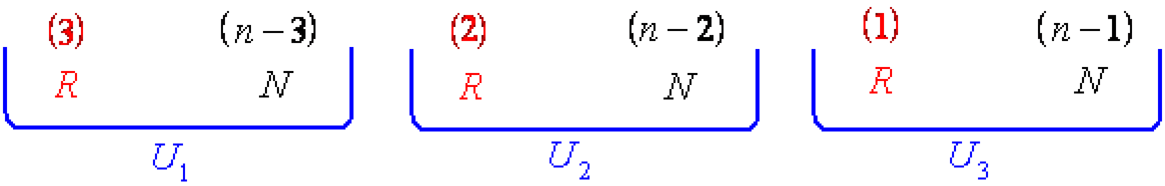
$$Aff\left(\overrightarrow{AU}\right)=z_U-z_A=a(1+i)-2i-(1+i)u+2i=\boxed{(1-i)(a-2)}$$

ب- بما أن $u\neq 1-i$ ، فإن : $a\neq 1$. إذن : $Aff\left(\overrightarrow{AU}\right)=Aff\left(\dfrac{a-2}{2(a-1)}\overrightarrow{AB}\right)$ ، ومنه فإن :

$\overrightarrow{AU}=\dfrac{a-2}{2(a-1)}\overrightarrow{AB}$ ، وبالتالي فإن النقط A و B و U مستقيمية .

التمرين الثالث :

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 4$.



نعتبر التجربة العشوائية التالية : نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة، ثم نسحب تآنيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1. القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي 0 و 1 و 2 ولدينا مجموعة القيم كما يلي : $X(\Omega)=\{0,1,2\}$.

2. نعتبر الأحداث التالية : A_i: « اختيار الصندوق U_i » ، حيث $1\leq i\leq 3$.

لدينا A_1 و A_2 و A_3 أحداث غير منسجمة مثنى مثنى واتحادها Ω ، فهي تكون تجزيئا للفضاء Ω .

حسب صيغة الاحتمالات الكلية ، لدينا :

أ- $$p(X=2)=p(A_1)p_{A_1}(X=2)+p(A_2)p_{A_2}(X=2)+p(A_3)p_{A_3}(X=2)$$

$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_n^2}$$

$$\boxed{p(X=2)=\frac{8}{3n(n-1)}}$$

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}\ ;\ C_2^2=1\ ;\ C_3^2=3$$

ب- لدينا : $$p(X=1)=p(A_1)p_{A_1}(X=1)+p(A_2)p_{A_2}(X=1)+p(A_3)p_{A_3}(X=1)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{C_1^1C_{n-1}^1}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1C_{n-2}^1}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1C_{n-3}^1}{C_n^2}$$

$$\boxed{p(X=1)=\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}}$$

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}\ ;\ C_{n-1}^1=n-1\ ;\ C_{n-2}^1=n-2\ ;\ C_1^1=1\ ;\ C_2^1=2\ ;\ C_3^1=3$$

جـ- لدينا : $\boxed{\dfrac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}} = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)} - \dfrac{8}{3n(n-1)} - 1 = p(X=2) - p(X=1) - 1 = p(X=0)$.

$p(X=0)=1-p(X=1)-p(X=2)=1-\dfrac{8}{3n(n-1)}-\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}=\boxed{\dfrac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}}$

ومنه نستنتج قانون احتمال X كما يلي :

قيم X : x_k	0	1	2
$p_k=p(X=x_k)$	$\dfrac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$	$\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	$\dfrac{8}{3n(n-1)}$

3. علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ، احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 هو : $p_{(X=2)}(A_3)$.

حسب صيغة الاحتمالات المركبة ، لدينا :

$$p(X=2)p_{(X=2)}(A_3)=p(A_3)p_{A_3}(X=2) \Rightarrow \frac{8}{3n(n-1)}p_{(X=2)}(A_3)=\frac{1}{3}\frac{C_3^2}{C_n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{(X=2)}(A_3)=\frac{3}{4}}$$

المسألـــــــــة :

I. لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \ , \ g(x)=2(1-e^{-x})-x$.

1. أ- لكل x من $\mathbb{R}^+$ ، لدينا : $g'(x)=2(1-e^{-x})'-x'=2e^{-x}-1$ ، ولدينا :

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{-x}-1=0 \Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=\ln 2 .$$

إذن : $\forall x\in[0,\ln 2] \ , \ g'(x)\geq 0$ و $\forall x\in[\ln 2,+\infty[\ , \ g'(x)\leq 0$.

ب- تغيرات الدالة g :

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2(1-e^{-x})-x=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. إذن :

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

2. أ- بما أن g دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[\ln 4,\ln 6]$ و $g(\ln 4)=\dfrac{3}{2}-2\ln 2\approx 0{,}1$ و $g(\ln 6)=\dfrac{5}{3}-\ln 6=\dfrac{5}{3}-\ln 3-\ln 2\approx -0{,}14$ و $g(\ln 4)\times g(\ln 6) \ < \ 0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\ln 4,\ln 6[$.

ب- g دالة تناقصية على المجال $[\ln 2,+\infty[$. إذن : $\forall x\in]\alpha,+\infty[\ , \ x>\alpha \Rightarrow g(x)<g(\alpha) \Rightarrow g(x)<0$

و $\forall x\in[\ln 2,\alpha[\ , \ x<\alpha \Rightarrow g(x)>g(\alpha) \Rightarrow g(x)>0$

g دالة تزايدية على المجال $\left[0,\ln 2\right]$. إذن : $\forall x \in \left]0,\ln 2\right]$, $\ln 2 \geq x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$

خلاصة : $\forall x \in \left]0,\alpha\right[$, $g(x) > 0$ و $\forall x \in \left]\alpha,+\infty\right[$, $g(x) < 0$ و $g(0) = g(\alpha) = 0$.

3. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\left(1-e^{-u_n}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- لدينا :

✓ من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 1$ ، إذن : $1 \leq u_0 < \alpha$ ، لأن : $1 = \ln e < \ln 4 < \alpha$.

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن $1 \leq u_n < \alpha$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} < \alpha$:

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n < \alpha \quad &\Rightarrow \quad -\alpha < -u_n \leq -1 \\ &\Rightarrow \quad e^{-\alpha} < e^{-u_n} \leq e^{-1} \\ &\Rightarrow \quad 1-e^{-1} \leq 1-e^{-u_n} < 1-e^{-\alpha} \\ &\Rightarrow \quad 2\left(1-e^{-1}\right) \leq 2\left(1-e^{-u_n}\right) < 2\left(1-e^{-\alpha}\right) \\ &\Rightarrow \quad 1 \leq u_{n+1} < \alpha \end{aligned}$$

لأن : $\boxed{2\left(1-e^{-\alpha}\right) = \alpha}$ $g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\left(1-e^{-\alpha}\right) - \alpha = 0 \Rightarrow$ و $g(1) \geq 0 \Rightarrow 2\left(1-e^{-1}\right) \geq 1$.

✓ خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < \alpha$.

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1} - u_n = 2\left(1-e^{-u_n}\right) - u_n = g(u_n)$.

جـ- ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا : $u_n \in \left[1,\alpha\right[$. إذن $g(u_n) > 0$ ، ومنه فإن : $u_{n+1} - u_n > 0$. و هذا يعني أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

د- لدينا : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد α. إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l ينبغي تحديدها ؟

نضع : $h(x) = 2\left(1-e^{-x}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. لدينا :

✓ h دالة متصلة على المجال $\left[1,\alpha\right]$.

✓ $\forall x \in \left[1,\alpha\right]$, $h'(x) = 2\left(1-e^{-x}\right)' = 2e^{-x} > 0$. إذن h تزايدية قطعا على $\left[1,\alpha\right]$ ، ومنه فإن :

$h\left(\left[1,\alpha\right]\right) = \left[h(1),h(\alpha)\right] \subset \left[1,\alpha\right]$ ، لأن : $h(\alpha) = \alpha$ و $g(1) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq h(1)$.

✓ $u_0 = 1 \in \left[1,\alpha\right]$

✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l.

إذن : $h(l) = l$ و $l \in \left[1,\alpha\right]$. حسب السؤال I.2.ب ، لدينا : $l = \alpha$. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x^2}$.

1. حساب نهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}\left(e^{-x}-1\right) = \boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

$\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \dfrac{1-e^x}{x^2} = \lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \dfrac{e^x-1}{x} \times \left(\dfrac{-1}{x}\right) = \boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ و $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}\left(e^{-x}-1\right)=\boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

2. أ- نعلم أن : $g(\alpha)=0\Rightarrow 2\left(1-e^{-\alpha}\right)=\alpha\Rightarrow e^{\alpha}-1=\frac{\alpha}{2}e^{\alpha}\Rightarrow\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)e^{\alpha}=1\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{2}{2-\alpha}$. إذن :

$$f(\alpha)=\frac{1-e^{\alpha}}{\alpha^2}=\frac{1-\frac{2}{2-\alpha}}{\alpha^2}=\frac{-\alpha}{\alpha^2(2-\alpha)}=\boxed{\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}}.$$

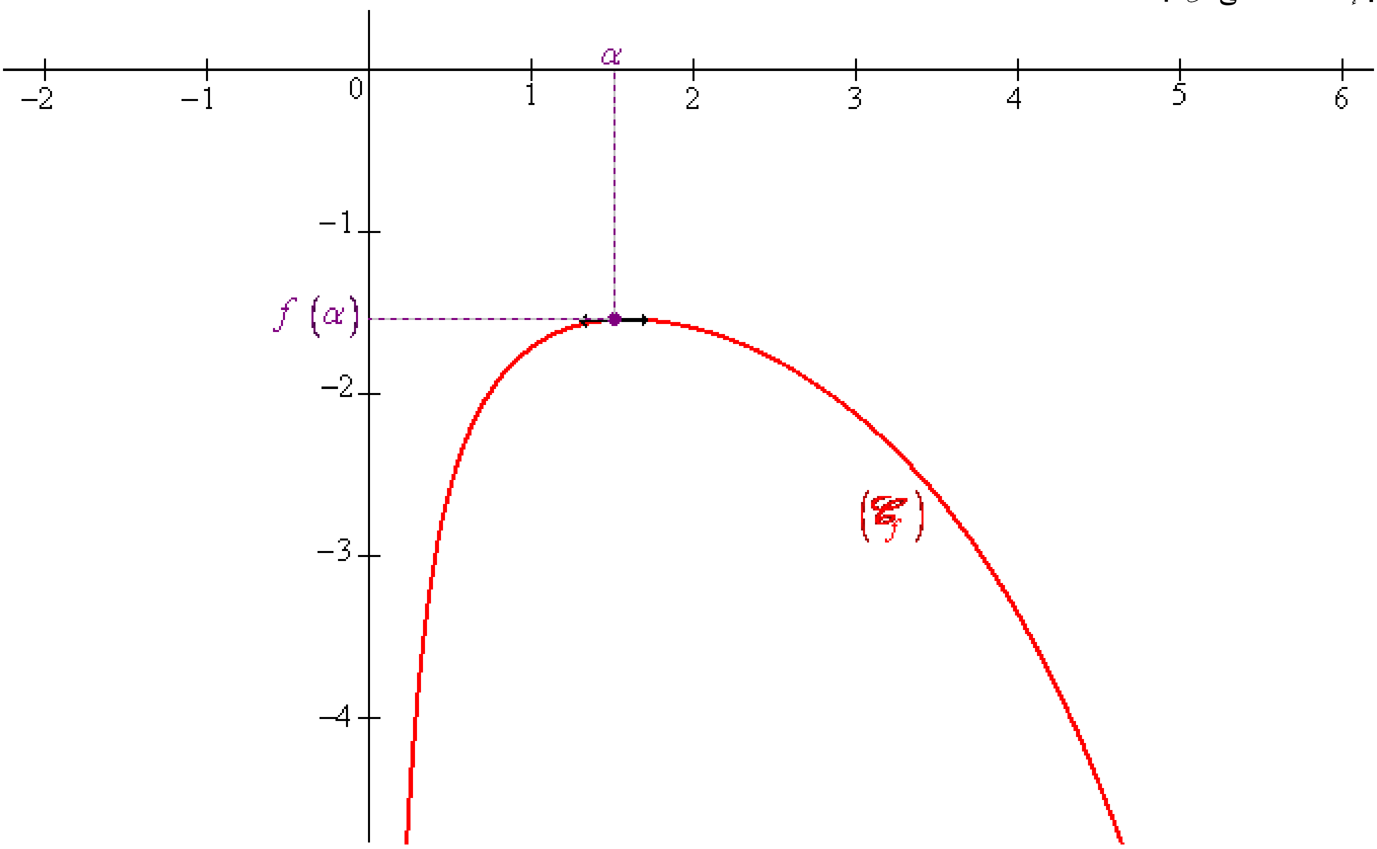
ب- ليكن $x\in\mathbb{R}_+^*$. لدينا :

$$f'(x)=\left(\frac{1-e^x}{x^2}\right)'=\frac{-e^x x^2-2x\left(1-e^x\right)}{x^2}=\frac{e^x\left(-x-2\left(e^{-x}-1\right)\right)}{x_3}=\boxed{\frac{e^x g(x)}{x^3}}$$

إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$ هي إشارة $g(x)$ ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$	↘	$-\infty$

3. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}$:



III. نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt \quad , \quad x>0 \\ F(0)=-\ln 2 \end{cases}$$

1. أ- ليكن $x>0$. لدينا : $u:t\mapsto 1-e^t$ و $v:t\mapsto \frac{-1}{t}$ دالتان متصلتان وقابلتان للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و $u':t\mapsto -e^t$ و $v':t\mapsto \frac{1}{t^2}$ دالتان متصلتان على المجال $]0,+\infty[$. إذن حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt=\int_x^{2x}\left(1-e^t\right)\left(-\frac{1}{t}\right)'dt=\left[\frac{e^t-1}{t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$$

$$F(x)=\boxed{\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt}$$

ب- لكل $x>0$ ولكل $t\in[x,2x]$. لدينا : $x\le t\le 2x\Rightarrow e^x\le e^t\le e^{2x}\Rightarrow \frac{e^x}{t}\le\frac{e^t}{t}\le\frac{e^{2x}}{t}$.

إذن : $e^x\int_x^{2x}\frac{dt}{t}\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt\le e^{2x}\int_x^{2x}\frac{dt}{t}$. أي : $\boxed{e^x\ln 2\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt\le e^{2x}\ln 2}$ ، لأن :

$$\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\left[\ln t\right]_x^{2x}=\ln(2x)-\ln x=\ln\left(\frac{2x}{x}\right)=\ln 2.$$

جـ- بما أن $\forall x\in]0,+\infty[:\ e^x\ln 2\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\le e^{2x}\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}e^{2x}\ln 2=\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}e^x\ln 2=\ln 2$ ،

فإن : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt=\ln 2}$.

استنتاج : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^x-1}{x}-\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt=-\ln 2=F(0)$ ، لأن :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt=\ln 2$.

ومنه نستنتج أن F دالة متصلة على اليمين في الصفر.

2. أ- ليكن $x>0$ و $t\in[x,2x]$. لدينا :

$$\begin{aligned} x\le t\le 2x &\Rightarrow e^x\le e^t\le e^{2x}\\ &\Rightarrow 1-e^t\le 1-e^x\\ &\Rightarrow \frac{1-e^t}{t^2}\le\frac{1-e^x}{t^2}\\ &\Rightarrow F(x)\le\left(1-e^x\right)\int_x^{2x}\frac{dt}{t^2}\\ &\Rightarrow F(x)\le\left(1-e^x\right)\left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ F(x)\le\frac{1-e^x}{2x}$$

ومنه فإن : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[:\ F(x)\ \le\ \frac{1-e^x}{2x}$.

2. ب- بما أن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[:\ F(x)\ \le\ \frac{1-e^x}{2x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\left(e^{-x}-1\right)=-\infty$ ، لأن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ ، فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\boxed{-\infty}$.

3. لدينا $t\mapsto\frac{1-e^t}{t^2}$ دالة متصلة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية φ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ولدينا :

$$\forall x\in\left]0,+\infty\right[:\ F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt=\left[\varphi(t)\right]_x^{2x}=\varphi(2x)-\varphi(x).$$

نعلم أن φ و $w:\ x\mapsto 2x$ الدالتان قابلتان للاشتقاق على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، إذن $x\mapsto\varphi(2x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، وعليه فإن F دالة قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، ولكل x من المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، لدينا :

$$F'(x)=\left(\varphi(2x)-\varphi(x)\right)'=(2x)'\varphi'(2x)-\varphi'(x)=2\frac{1-e^{2x}}{4x^2}-\frac{1-e^x}{x^2}F'(x)=\boxed{-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2}.$$

4. أ- ليكن $x>0$.

✓ F دالة متصلة على المجال $\left[0,x\right]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,x\right[$. حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، لدينا :

$$\exists\beta\in\left]0,x\right[\ /\ F(x)-F(0)=F'(\beta)(x-0)$$

أي : $\exists\beta\in\left]0,x\right[\ /\ F(x)-F(0)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^\beta-1}{\beta}\right)x$.

✓ $\exp$ دالة متصلة على المجال $\left[0,\beta\right]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,\beta\right[$. حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، لدينا :

$\exists c\in\left]0,\beta\right[\ /\ \exp(\beta)-\exp(0)=\exp'(c)(\beta-0)$. أي : $\exists c\in\left]0,\beta\right[\ /\ e^\beta-1=e^c\,\beta$.

وبالتالي فإن : $\exists c\in\left]0,x\right[\ /\ F(x)-F(0)\ =\ -\frac{1}{2}\,x\ e^{2c}$.

ب- لدينا :

$$\begin{aligned}0<c<x\ &\Rightarrow\ 0<2c<2x\\&\Rightarrow\ 1<e^{2c}<e^{2x}\\&\Rightarrow\ -\frac{1}{2}e^{2x}<-\frac{1}{2}e^{2c}<-\frac{1}{2}\\&\Rightarrow\ -\frac{1}{2}e^{2x}<\frac{F(x)-F(0)}{x}<-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

إذن : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ :\ -\frac{1}{2}e^{2x}\ <\ \frac{F(x)-F(0)}{x}\ <\ -\frac{1}{2}$.

جـ- بما أن : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ :\ -\frac{1}{2}e^{2x}\ <\ \frac{F(x)-F(0)}{x}\ <\ -\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ و

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-\frac{1}{2}e^{2x}=-\frac{1}{2}$ ، فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{F(x)-F(0)}{x}\ =\ -\frac{1}{2}$.

وبالتالي فإن F دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ولدينا : $\boxed{F'_d(0)=-\frac{1}{2}}$.

<u>إضافات :</u>

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=-\infty$ و $\forall x\in\,]0,+\infty[\,:\ \frac{F(x)}{x}\le\frac{1-e^x}{2x^2}$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x^2}\left(e^{-x}-1\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=-\infty$. ومنه فإن المنحنى $\mathscr{C}_F$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه محور الأراتيب.

- جدول تغيرات الدالة F :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-\frac{1}{2}$ $-$	
$F(x)$	$-\ln 2$ $\searrow$	$-\infty$

- إنشاء المنحنى $\mathscr{C}_F$: