نيابة الخميسات / ثانوية موسى بن نصير	تجريبي دورة فبراير 2016 / لمادة الرضيات	2 بكالوريا علوم رياضية
		مدة الإنجاز : أربع ساعات
		المعامل : 09

❖ تمرين رقم 01: (1,5 نقطة)

⇦ ليكن $\theta \in \left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$ و z_1 و z_2 هما حلي المعادلة :

$(E): z^2 + 2iz - 1 + ie^{2i\theta} = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

0,25 — 1)- بدون حل المعادلة (E) ، بين أن : $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

0,75 — 2)- حدد قيمة θ التي من أجلها $1-i$ حل للمعادلة (E) ، ثم أكتب الحلين في هذه الحالة على الشكل المثلثي .

0,5 — 3)- حدد بدلالة θ حلي المعادلة (E) .

❖ تمرين رقم 02: (5,5 نقطة)

I- لتكن u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); u(x) = \ln^3 x - \ln^2 x + \ln x + 1$.

0,5 — 1)- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

0,5 — 2)- بين أن u تقابل من $\mathbb{R}^{*+}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

0,5 — 3)- إستنتج أن المعادلة : $u(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^{*+}$ و أن $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

0,25 — 4)- ضع جدولا تحدد فيه إشارة الدالة u على $\mathbb{R}^{*+}$

II- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي :

$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f(x) = \frac{x \ln x}{1 + \ln^2 x}$ و $f(0) = 0$.

0,5 — 1)- أ- بين أن f متصلة على $\mathbb{R}^{+}$.

0,5 — ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

0,25 — 2)- أ- بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر وأول هندسيا النتيجة .

0,5 — ب- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{u(x)}{(1 + \ln^2 x)^2}$.

0,25 — ج- ضع جدول تغيرات f على $\mathbb{R}^{+}$.

0,5 — 3)- أرسم (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نعطي $\alpha \simeq 0,57$ و $f(\alpha) \simeq -0,25$)

0,25 — III-1)- ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، بين أن المعادلة : $(E_n): f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا a_n في $[1, +\infty[$.

0,25 — 2)- أ- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f(x) \le \frac{1}{2} x$.

0,25 — ب- إستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n \ge 2n$ ثم أحسب نهاية المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

0,25 — 3)- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); \sqrt[n]{a_n} = e^{\frac{1+\ln^2(a_n)}{a_n}}$.

0,5 — ب- أحسب كل نهاية مما يلي : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a_n} - 1\right)$.

❖ تمرين رقم 03: (5,75 نقطة)

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=\frac{e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\ .$$

1)- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,25

2)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\dfrac{f(x)}{1+e^{2x}}$ وأن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده . 0,5

ب- بين أن : $(\forall x\in J);\ f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$. 0,25

3)- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R});\ f''(x)=\left(1-2e^{2x}\right)\times\dfrac{f(x)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$ ، ثم أدرس تقعر المنحنى (C_f) . 0,5

4)- أرسم المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$) . 0,25

5)- أ- بين أن المعادلة: $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن : $\ln 2<\alpha<1$. 0,5

ب- أحسب التكامل : $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\ln\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)dx$ (يمكنك إستعمال مكاملة بالأجزاء) . 0,25

ج- إستنتج مساحة الحيز (Δ) المحصور بين المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ و محوري المعلم . 0,5

II- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0=0 \text{ و } (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f(u_n)\ .$$

1)- أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N});0\le u_n<\alpha$. 0,25

ب- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة و أحسب نهايتها . 0,5

2)- لكل $n\in\mathbb{N}$ نضع : $v_n=\dfrac{1}{\alpha-u_n}\displaystyle\int_{u_n}^{\alpha}f(x)dx$.

✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}\le v_n\le\alpha$ ، ثم إستنتج أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها 0,25

III- لتكن F الدالة المعرفة على $]-1,1[$ بما يلي :

$$F(0)=-\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \text{ و } (\forall x\in]-1,0[\cup]0,1[);F(x)=\int_{0}^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)}f(t)dt\ .$$

1)- بين أن الدالة F زوجية . 0,25

2)- بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و أن : $(\forall t\in]0,1[);F'(t)=\dfrac{1}{1-t^2}$. 0,5

3)- أحسب $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، وبين أن : $(\forall x\in]0,1[);F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. 0,5

4)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق F على اليمين في الصفر . 0,5

5)- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)$ ، ثم أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم . 0,5

❖ تمرين رقم 04: (5,75 نقطة)

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right).$$

1)- بين أن للمنحنى (C_f) مقاربين أفقيين ينبغي تحديدهما . 0,25

2)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=e^{-x}\left(\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln\left(1+e^{x}\right)\right)$. 0,25

ب- بين أن : $(\forall u\in\mathbb{R}^{*+});\dfrac{u}{1+u}<\ln(1+u)<u$ ، ثم إستنتج منحى تغيرات f على $\mathbb{R}$. 0,5

3)- أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده . 0,25

ب- أرسم المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. 0,5

4)- ليكن $\lambda\in\mathbb{R}^{*+}$ و $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المحور (Ox) والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x=0$ و $x=\lambda$.

✓ بين أن : $S(\lambda)=\ln 4-\left[e^{-\lambda}\ln\left(1+e^{\lambda}\right)+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)\right]$. 0,5

5)- أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{-k}}\ln\left(1+\sqrt[n]{e^{k}}\right)$. 0,25

II- لكل $n\in\mathbb{N}$ نضع : $I_n=\int_0^1 e^{-nt}\ln\left(1+e^{t}\right)dt$

1)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});0\le I_{n+1}\le I_n$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة . 0,5

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});0\le I_n\le\ln(1+e)\int_0^1 e^{-nt}dt$ ، ثم إستنتج نهاية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0,5

2)- أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N});nI_n=\ln 2-e^{-n}\ln(1+e)+\int_0^1\frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}}dt\ .$$ 0,25

ب- إستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\ln 2$. 0,25

III- لكل $n\in\mathbb{N}$ نضع : $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k$ و $a_n=S_{2n+1}$ و $b_n=S_{2n}$.

1)- بين أن المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان . 0,5

2)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})(\forall t\in\mathbb{R});\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kt}=\dfrac{1}{1+e^{-t}}+(-1)^n\dfrac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}$. 0,25

ب- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});S_n=\int_0^1\dfrac{\ln\left(1+e^{t}\right)}{1+e^{-t}}dt+(-1)^n\int_0^1 e^{-(n+1)t}\dfrac{\ln\left(1+e^{t}\right)}{1+e^{-t}}dt$. 0,25

ج- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});a_n\le\int_0^1\dfrac{\ln\left(1+e^{t}\right)}{1+e^{-t}}dt\le b_n$. 0,25

د- تحقق أن : $\int_0^1\dfrac{\ln\left(1+e^{t}\right)}{1+e^{-t}}dt=\int_2^{1+e}\dfrac{\ln x}{x}dx$ ، ثم إستنتج النهاية المشتركة لكل من المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0,5

❖ تمرين رقم 05: (1,5 نقطة)

⇦ في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي $z_A=1$ و $z_B=1+i$ و ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته θ ، حيث $\theta\in\left]0,\pi\right[$ و نضع : $A'=r(A)$ و $B'=r(B)$.

1)- بين أن : $\overline{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. 0,25

2)- ليكن E منتصف $\left[AA'\right]$ و F منتصف $\left[BB'\right]$.

أ- بين أن المثلث OEF متساوي الساقين و قائم الزاوية في E . 0,5

ب- بين أن : $\frac{z_F-z_A}{z_{A'}-z_A}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ ، ثم إستنتج أن المستقيم $\left(AA'\right)$ يقطع القطعة $\left[BB'\right]$ في نقطة ينبغي تحديدها . 0,75

➢ تمرين إضافي :

⇦ في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط M و M' و M'' التي ألحاقها على التوالي :

$z=2e^{i\theta}$ و $z'=\sqrt{2}(-1+i)e^{i\theta}$ و $z''=i+4e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)}$ ، حيث $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1)- أ- بين أن : $M'=r(M)$ ، حيث r هو الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{3\pi}{4}$.

ب- بين أن : $M''=h\left(M'\right)$ ، حيث h تحاك ينبغي تحديد نسبته و لحق مركزه Ω .

ج- إستنتج المجموعة (Γ) للنقط $M''\left(z''\right)$ عندما يتغير البارامتر الحقيقي θ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$$(E):\left(\sqrt{2}z-1\right)^3=(-2+2i)e^{i\theta}z^3$$

أ- حدد الجذور المكعبة للعدد العقدي : $a=(-2+2i)e^{i\theta}$ (لاحظ أن $(1+i)^3=-2+2i$) .

ب- ليكن $\alpha\in\left]0,2\pi\right[$ ، بين أن : $\frac{\sqrt{2}z-1}{z}=\sqrt{2}e^{i\alpha}\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$.

ج- حدد على الشكل الجبري حلول المعادلة (E) .

إنتهى الموضوع .