2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 04	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن الختير	الدورة الأولى : 2016/2015	نيابة الخميسات
مدة الإنجاز : أربع ساعات		

❖ تمرين رقم 01: (3,25 نقطة)

⇦ لكل $z \in \mathbb{C}-\{i\}$ ، نضع : $f(z)=i\times\dfrac{z-2i}{z-i}$.

1)- حدد في $\mathbb{C}$ الحلين u و v للمعادلة : $(E): f(z)=z$ بحيث : $\operatorname{Re}(u)=1$. 0,75

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، نعتبر النقط : $C(u)$ و $D(v)$ و $M(z)$ و $M'(f(z))$ ، حيث $z \in \mathbb{C}-\{i,u,v\}$.

أ- بين أن : $\dfrac{f(z)-u}{f(z)-v}=-\dfrac{z-u}{z-v}$. 1

ب- إستنتج أن : $\overline{(\overrightarrow{DM'},\overrightarrow{CM'})}\equiv\pi+\overline{(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{CM})}[2\pi]$. 0,25

ج- بين أنه إذا كانت C و D و M مستقيمية ، فإن C و D و M و M' مستقيمية . 0,5

د- بين أنه إذا كانت C و D و M غير مستقيمية ، فإن C و D و M و M' متداورة . 0,75

❖ تمرين رقم 02: (06 نقط)

⇦ في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي $z_A=-2i$ و $z_B=4$ و $z_C=-2+2i$ و $z_D=-2\sqrt{3}$.

1)- حدد طبيعة المثلث ABC ، ثم أحسب كلا من AD و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AD})}$. 1,25

2)- لتكن E صورة C بالدوران r مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و لتكن F صورة C بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$.

أ- أحسب z_E و z_F لحقي النقطتين E و F على التوالي . 1

ب- بين أن المثلث BCE قائم الزاوية و متساوي الساقين في C و أن المثلث BEF متساوي الأضلاع . 1,25

3)- نعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) مختلفة عن E بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\dfrac{4z+8i}{iz-4+4i}$.

أ- بين أن لكل نقطة $M(z)$ من (P) مختلفة عن A و E ، لدينا : 1

$$OM'\times EM=4.AM \text{ و } \overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM'})}+\overline{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{EM})}\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi] .$$

ب- حدد و أنشىء في المستوى العقدي (P) كل مجموعة مما يلي : 1,5

$$(E_1)=\{M(z)\in(\mathrm{P});|z'|=1\} \text{ و } (E_2)=\{M(z)\in(\mathrm{P});z'\in\mathbb{R}^{*-}\} .$$

❖ **تمرين رقم 03: (4,25 نقطة)**

⇦ لكل $a \in \mathbb{C}-\{-i,i\}$ ، نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E): z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0 .$$

1)- أ- تحقق أن $u=a+i$ حل للمعادلة (E) .	0,5
ب- إستنتج الحل الثاني v للمعادلة (E) ، ثم بين أن : $\|u\|+\|v\|\geq 2$.	1,25
ج- حدد مجموعة الأعداد العقدية a من $\mathbb{C}-\{-i,i\}$ التي يكون لأجلها : $\|u\|+\|v\|=2$.	0,75
2)- نفترض في كل ما يلي أن : $\|a\|=1$.	
أ- بين أن : $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$.	0,75
ب- تحقق أن : $u^2=a\left[\left(a-\bar{a}\right)+2i\right]$ ، ثم إستنتج أن : $\arg(u)\equiv\frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$.	1

❖ **تمرين رقم 04: (6,5 نقطة)**

⇦ في المستوى العقدي (P) نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي $z_A=1$ و $z_B=2$

و لكل $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(F): iz^2-2(i-\cos\theta)z-2\cos\theta=0 .$$

1)- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (F) .	1
2)- حدد و أنشىء المجموعة : $(\Gamma)=\left\{M(z)\in(P);\arg\left(\frac{z-2}{z}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]\right\}$.	1
3)- نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي : $z_1=1+ie^{i\theta}$ و $z_2=1+ie^{-i\theta}$.	
أ- أكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .	1
ب- بين أن : $\frac{z_1-2}{z_1}\in i\mathbb{R}^{*-}$ و $\frac{z_2-2}{z_2}\in i\mathbb{R}^{*-}$ ، ثم إستنتج أنه عندما يتغير θ على المجال $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ النقطتان M_1 و M_2 تتغيران على مجموعة ينبغي تحديدها .	1
ج- نفترض أن : $M_1\neq M_2$ و لتكن G مركز ثقل المثلث AM_1M_2 .	
✓ بين أن : $aff(G)=1+\frac{2}{3}i\cos\theta$ ، ثم إستنتج المحل الهندسي للنقطة G عندما يتغير θ على المجال $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ و $M_1\neq M_2$.	1
د- حدد قيم θ التي يكون من أجلها المثلث AM_1M_2 متساوي الساقين و قائم الزاوية .	0,75
هـ- ما هي قيم θ التي يكون من أجلها المثلث AM_1M_2 متساوي الأضلاع ؟	0,75

❖ تمارين إضافية:

❖ تمرين رقم 01:

✓ حل في المجموعة $\mathbb{C}^2$ المعادلة : $(E):|u+iv|^2=u^2+v^2$.

❖ تمرين رقم 02:

✓ بين أنه : $(\forall a\in\mathbb{C}-[-1,1])(\exists! b\in\mathbb{C});\begin{cases} a=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right) \\ |b|>1 \end{cases}$.

❖ تمرين رقم 03:

✓ أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\sum_{k=1}^{n}|\sin(k)|$.

❖ تمرين رقم 04:

✓ حدد جميع الأزواج (a,n) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث : $\left[2a+i\left(a^2-1\right)\right]^n=\left(a^2+1\right)^n$.

❖ تمرين رقم 05:

✓ بين أن : $(\forall(x,\theta)\in]-1,1[\times\mathbb{R});\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k\sin(k\theta)=\frac{x\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}$.

❖ تمرين رقم 06:

⇦ في المستوى العقدي (P) نعتبر النقط $A(z)$ و $B(z^2)$ و $C(z^3)$ ، حيث $z\in\mathbb{C}$.

✓ حدد شرطا كافيا و لازما لكي يكون ABC مثلثا مركز تعامده النقطة O أصل المعلم .

❖ تمرين رقم 07:

⇦ ليكن f_n التحويل الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) بالنقطة $M'(z')$ من (P)

بحيث : $z'=e^{i\frac{n\pi}{3}}z+2$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

✓ حدد تبعا لقيم n من $\mathbb{N}$ طبيعة التحويل f_n (ينبغي تحديد عناصره المميزة في كل حالة) .

❖ تمرين رقم 08:

⇦ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E):(1+z)^n=e^{2in\theta}$ ، حيث $\theta\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

✓ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم إستنتج أن : $\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin(n\theta)$.

إنتهى الموضوع .