الثانوية التأهيلية وادي الذهب – تيفلت 16/12/2009

فرض كتابي رقم2 2ب.ف.ك الدورة الأولى

المادة: الرياضيات

ذ:عبد المالك أعكوبي المدة 1س ونصف

التمرين رقم 1 : (5 نقط)

نعتبر الدالة المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x-4; x\le 1 \\ f(x)=\sqrt{x}-3; x\succ 1 \end{cases}$$

1.بين أن f تقبل دالة اصلية على $\mathbb{R}$.

2.حدد جميع الدوال الاصلية ل f على $\mathbb{R}$.

3.حدد الدالة الاصلية F_0 التي تحقق 2= (0) F_0.

التمرين رقم 2 : (5 نقط)

نعتبر الدالة المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}; x\le 0 \\ f(x=\sqrt[3]{x^2+x}; x>0 \end{cases}$$

1.أدرس اتصال f في 0.

2.أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3.أدرس اشتقاق f في 0.

4.نضع : $g=f_{/]-\infty;0]}$

أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديد ه.

ب)بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة $\frac{1}{2}$ و أحسب $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$.

التمرين رقم 3: (10 نقط)

لتكن الدالة المعرفة كالتالي : $f(x)=|x|\sqrt{x^2-1}$

1.حدد مجموعة تعريف الدالة f وادرس زوجيتها واستنتج حيز الدراسة D_E .

2.ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1 و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

3.ادرس تغيرات الدالة f على D_E ثم على D_f.

4.أ) ادرس تقعر المنحنى (C_f) على المجال $]1;+\infty[$.

ب) حدد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

ج)ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د)أنشئ (C_f)في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

تصحيح الفرض الكتابى رقم 2

التمرين الاول

1_) لنبين أن f متصلة على $\mathbb{R}$

f متصلة على $]-\infty;0[$ لأنها مجموع دالة حدودية(متصلة) و مركب دالتين متصلتين

f متصلة على $[0;+\infty[$ لأنها مجموع دالة حدودية(متصلة) و جداء دالة خطية(متصلة) و دالة الجدر المربع (متصلة)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{x}{3}-\sqrt[3]{1-x}\right) = 0 = f(0)$$

(2ن)

إذن f متصلة على يسار 0 و منه f متصلة على$\mathbb{R}$ و بالتالي فهي تقبل دالة أصلية على$\mathbb{R}$

2_)

$$\begin{cases} f(x) = 1+\dfrac{x}{3}-(1-x)^{\frac{1}{3}} ; x<0 \\ f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}-3x^2 ; x\geq 0 \end{cases}$$

إذن

$$\begin{cases} F(x) = x+\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}+\alpha ; x<0 \\ F(x) = \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x^3+\beta ; x\geq 0 \end{cases}$$

و بما أن F متصلة في 0 فآن $\lim_{x\to 0^-} F(x) = F(0)$

(2ن)

أي $\beta = \alpha+\dfrac{3}{4}$

إذن الدوال الأصلية ل f على$\mathbb{R}$ هي :

$$(\alpha \in \mathbb{R})\begin{cases} F(x)=x+\frac{x^2}{6}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}+\alpha ; x<0 \\ F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x^3+\frac{3}{4}+\alpha ; x\geq 0 \end{cases}$$

3_) $f(3)\simeq \frac{3}{2.15}\simeq 1.3$ $\quad F_0(1)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}-1+\frac{3}{4}+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{3}{20}$

إذن الدالة الأصلية التي تحقق الشرط ألبدئي هي **(1ن)**

$$\begin{cases} F(x)=x+\frac{x^2}{6}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}-\frac{3}{20} ; x<0 \\ F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x^3+\frac{3}{5} ; x\geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني

1) **لدينا** $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

$D_f=\mathbb{R}$ **(لان** $\forall x\in\mathbb{R}; x^2+1\succ 0$)

(0.5ن)

2) $(\forall x\in\mathbb{R}; -x\in\mathbb{R})$ **و** $\left(f(-x)=\frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2+1}}=-\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}=-f(x)\right)$

اذن f دالة فردية ونستنتج أن $D_E=[0;+\infty[$ **5)**

(1. ن)

3) أ- ***f(0)=0***

(0. 5ن)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=+\infty$$

(1ن)

ب- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ **و**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}=0$$

ادن ξ_f يقبل محور الافاصيل كفرع شلجمي بجوار $+\infty$

(1ن)

4) ا-الاشتقاق على يمين0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}=1$$ و

(1ن)

اذن f قابلة للاشتقاق على يمين 0.

نستنتج إن ξ_f يقبل نصف مماس على يمين النقطة(O(0.0 معادلته $y=x$. (0.5)

ب-

$$\forall X\in\left]0.+\infty\right[/f'(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\frac{2x^2}{3\sqrt[3]{x^2+1}}}{\sqrt[3]{x^2+1}^2}=\frac{3(x^2+1)-2x^2}{3\sqrt[3]{x^2+1}^2\sqrt[3]{x^2+1}^2}=\frac{x^2+3}{3\sqrt[3]{x^2+1}^4}=\frac{x^2+3}{3(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}$$

(1ن)

ج- $\forall x\in D_E;x^2+3\succ 0$ و $\sqrt[3]{x^2+1}^4\succ 0$ إذن $f'(x)>0$

(1ن)

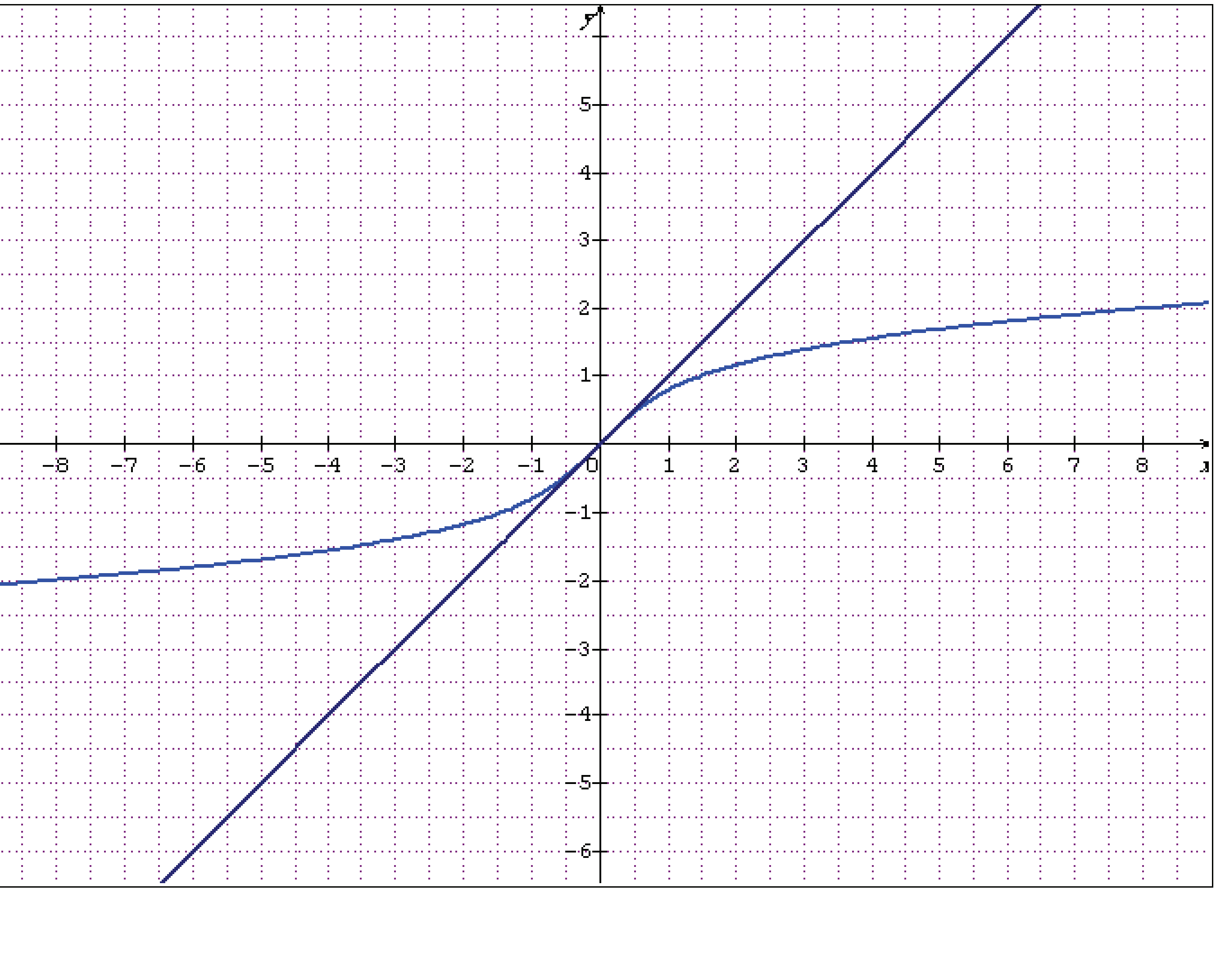
x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f (x)	$\nearrow$	$+\infty$

	0

5) ***وبما*** $f(3)=\frac{3}{\sqrt[3]{10}}$ ***إن*** $\sqrt[3]{10}\simeq 2.15$ ***فان***

اذن $f(3)\simeq\frac{3}{2.15}\simeq 1.3$ ***$A(3;1.3)$ نقطة من ξ_f.*** ***(0. 5)***

(0.5ن)



(1.5ن)

6) ا- g متصلة(خارج دالة حدودية ومركب دالتين متصلتين) و تزايدية

قطعا على $I=[0;+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة عكسية معرفة على $I=[0;+\infty[$ $J=$.

(1.5ن)

ج-

$$g^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\right)=x \Leftrightarrow g(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}=\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}(x^2+1)}=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2}(x^2+1)=x^3 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{x^2+1}{2}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow x=0; x^2-2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=0; x=1$$

(1ن)

اذن $\boxed{S=\{0;1\}}$