Exercice 1: (3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ *est un corps commutatif et que* $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire de zéro la matrice* $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ *et d'unité la matrice* $I=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ *et que* $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ *est un espace vectoriel réel. Pour tout couple* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *,on pose* $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$ *et on considère l'ensemble* $E=\{M(x,y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0,25 1. *Montrer que* E *est un sous groupe du groupe* $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0,25 2. (a) *Montrer que* E *est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel de* $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.

0,5 (b) *On pose* $J=M(0,1)$.*Montrer que* (I,J) *est une base de l'espace vectoriel* $(E,+,.)$.

0,5 3. (a) *Montrer que* E *est une partie stable de* $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 (b) *Montrer que* $(E,+,\times)$ *est un anneau commutatif.*

4. *Soit* φ *l'application de* $\mathbb{C}^*$ *vers* $M_2(\mathbb{R})$ *définie par :*
$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right):\varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$$

0,5 (a) *Montrer que* φ *est un homomorphisme de* $(\mathbb{C}^*,\times)$ *vers* $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 (b) *On pose* $E^*=E-\{O\}$. *Montrer que* $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.

0,25 (c) *En déduire que* $(E^*,\times)$ *est un groupe commutatif.*

0,25 5. *Montrer que* $(E,+,\times)$ *est un corps commutatif.*

Exercice 2: (3 points)

Soit p *un nombre premier tel que :* $p=3+4k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

0,5 1. *Montrer que pour tout entier relatif* x *, si* $x^2\equiv1\,[p]$ *alors* $x^{p-5}\equiv1\,[p]$.

2. *Soit* x *un entier relatif vérifiant :* $x^{p-5}\equiv1\,[p]$.

0,5 (a) *Montrer que* x *et* p *sont premiers entre eux.*

0,5 (b) *Montrer que :* $x^{p-1}\equiv1\,[p]$.

0,5 (c) *Vérifier que :* $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$.

0,5 (d) *En déduire que :* $x^2\equiv1\,[p]$.

0,5 3. *Résoudre dans* $\mathbb{Z}$ *l'équation :* $x^{62}\equiv1\,[67]$.

Exercice 3: (3,5 points)

Soit m un nombre complexe.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im+2)\,z + im + 2 - m = 0$$

0,25 1. (a) *Vérifier que $\Delta = (im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m) .*

0,5 (b) *Donner suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m).*

0,5 2. *Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.*

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A , Ω , M et M' d'affixes respectifs $a = -1-i$, $\omega = i$, m et $m' = -im - 1 + i$.

1. *Soit R la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme M en M' .*

0,25 (a) *Vérifier que Ω est le centre de R.*

0,5 (b) *Déterminer b l'affixe de B , où B est le point tel que $A = R(B)$.*

0,5 2. (a) *Vérifier que : $m' - a = \dfrac{\omega - a}{\omega - b}(m-b)$.*

(b) *En déduire que les points A , M et M' sont alignés si et seulement si les points les points A , B , Ω et M sont cocycliques.* 0,5

(c) *Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A , M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.* 0,5

Exercice 4: (7,5 points)

Partie I :

0,5 1. (a) *Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[) : \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$.*

(b) *En utilisant le changement de variable $u = t^2$, montrer que :*

0,5 $$(\forall x \in]0,+\infty[) : \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du \ .$$

0,5 (c) *En déduire que $(\forall x \in]0,+\infty[) : \dfrac{1}{2(1+x)} \leqslant \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.*

0,25 2. *Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.*

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0,25 1. (a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

(b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 .(On pourra utiliser le résultat de la question I-2)

0,5

0,75 (c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$,puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, puis vérifier que :

0,5 $(\forall x \in]0,+\infty[) : f'(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

0,25 (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

0,25 (c) Vérifier que $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$.

3. Représenter graphiquement la courbe (C_f) .(On construira la demi-tangente au point

0,5 d'abscisse 0) .

Partie III :

1. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

0,5 (a) Montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[) : 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

0,5 (b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ puis montrer que $g(]0,+\infty[) =]-\infty,1[$.

0,25 (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$.

2. Soit a un réel de l'intervalle $]0,+\infty[$.
On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$.

0,25 (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \succ 0$.

0,5 (b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

0,5 (c) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$.

0,25 (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α .

Exercice 5: (2,5 points)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

0,5 1. *Montrer que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

0,5 2. (a) *Montrer que* $(\forall x \in]0, +\infty[) : F(x) \geqslant x$ *et en déduire* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

0,5 (b) *Montrer que F est impaire et en déduire* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

0,5 (c) *Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

0,5 (d) *Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0 , puis calculer $G'(0)$.*

Fin De L'épreuve