2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 02	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن لختير	الدورة الأولى 2011/2010	نيابة الخميسات
مدة الإنجاز : أربع ساعات		

- **التمرين رقم 01:** $\left(03pts\right)$

ليكن $t \in \mathbb{R}^{*+}$ و $n \in \mathbb{N}^*$.

و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right), f_n\left(x\right) = x^n - t\left(1-x\right) .$$

1- بين أن المعادلة : $f_n\left(x\right) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث $0 < \alpha_n < 1$.

2- بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), f_{n+1}\left(\alpha_n\right) = -t\left(1-\alpha_n\right)^2$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3- بين أن المتتالية $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و حدد تأطيرا لنهايتها .

4- أثبت بالخلف أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

- **التمرين رقم 02:** $\left(05pts\right)$

I- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f\left(x\right) = \dfrac{x^3+4x}{8}$.

1- بين أن f متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f\left(x\right) = x$ و أدرس إشارة $f\left(x\right) - x$.

3- حدد ما يلي : $f\left(\left]-\infty,0\right]\right)$ و $f\left(\left[0,2\right]\right)$ و $f\left(\left[2,+\infty\right[\right)$.

II- لتكن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ و } \left(\forall n \in \mathbb{N}\right), u_{n+1} = f\left(u_n\right) .$$

1- حدد شرطا كافيا و لازما لكي تكون المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة .

2- نفترض أن $u_0 \in \left]0,2\right[$، بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

3- نفترض أن $u_0 \in \left]-2,0\right[$ ، بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

4- أدرس رتابة المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم أحسب نهايتها معللا جوابك في كل حالة من الحالتين :

$$u_0 \in \left]2,+\infty\right[\text{ و } u_0 \in \left]-\infty,-2\right[.$$

• التمرين رقم 03: $\left(03pts\right)$

لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $u_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $v_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

و لتكن الدالة F_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+),F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.$$

1)- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان ، ماذا تستنتج ؟

2)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+),F_n^{'}(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.

3)- إستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+),F_{2n+1}(x)\le \operatorname{Arctan}(x)\le F_{2n}(x)$.

4)- إستعمل نتيجة السؤال **3**)- لتحديد النهاية المشتركة لكل من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• التمرين رقم 04: $\left(04pts\right)$

لتكن f_n الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f_n(x)=\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{nx+p}}\right)-\sqrt{n}$$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

1)- بين أن مجموعة تعريف f_n هي : $I_n=\left]-\frac{1}{n},+\infty\right[$.

2)- بين أن f_n تقابل من المجال I_n نحو مجال J_n ينبغي تحديده .

3)- إستنتج أن المعادلة : $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في I_n و أن $\alpha_n>0$.

4)- بين أن : $(\forall x\in]1,+\infty[),2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)<\frac{1}{\sqrt{x}}<2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$.

5)- أثبت أن : $\frac{9}{16}-\frac{1}{n}<\alpha_n<\frac{9}{16}$ ، $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\ge2}$ متقاربة محددا نهايتها .

- **التمرين رقم 05:** $\left(05pts\right)$

لتكن f الدالة المعرفة على $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right),f\left(x\right)=\sqrt{1+\frac{1}{\tan\left(x\right)}}\quad \text{و}\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 .$$

1)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f على اليسار في $x_0=\frac{\pi}{2}$.

2)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرف على المجال $J=\left[1,+\infty\right[$.

3)- بين أن المعادلة : $f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و أن $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

4)- لتكن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{\pi}{4}$ و $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

أ- باستعمال متفاوتة التزايدات المنتهية ، بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\left|u_{n+1}-\alpha\right|\le\frac{3}{4}\left|u_n-\alpha\right|$.

ب- أثبت أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

5)- بين أن f^{-1} قابلة للإشتقاق على المجال $\left]1,+\infty\right[$ و أن :

$$\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right),\left(f^{-1}\right)'\left(x\right)=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2+1} .$$

6)- لكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$ ، نضع : $h\left(x\right)=f^{-1}\left(\sqrt{1+x}\right)+f^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$.

⇦ بين أن h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ ، ثم أحسب $h'\left(x\right)$ و إستنتج تعبير $h\left(x\right)$ على $\mathbb{R}^{*+}$.

7)- لتكن $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

⇦ بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\le S_n\le f^{-1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

⇦ تمارين إضافية:

- **التمرين رقم 01:** $\left(01pt\right)$

ليكن $a\in\mathbb{R}$ و لتكن $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$a_1\in\mathbb{R} \text{ و } \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), a_{n+1}=\left(a_n\right)^2+\left(1-2a\right)a_n+a^2 .$$

⇦ حدد جميع قيم العدد الحقيقي a_1 التي لأجلها تكون المتتالية $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، ثم أحسب في هذه الحالة نهايتها .

- **التمرين رقم 02:** $\left(02pt\right)$

لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_1=1\ ,\ u_2=2 \\ \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), u_{n+2}=\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_1=9\ ,\ v_2=6 \\ \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), v_{n+2}=\sqrt{v_n}+\sqrt{v_{n+1}} \end{cases} .$$

⇦ بين أن المتتاليتين $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتان وحدد نهاية كل واحدة منهما .

- **التمرين رقم 03:** $\left(02pt\right)$

لتكن $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية محدودة بحيث : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), x_{n+2}\le\frac{1}{3}x_{n+1}+\frac{2}{3}x_n$.

⇦ أثبت أن المتتالية $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة (غير مطلوب حساب نهايتها) .

إنتهى الموضوع .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .