ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	فرض محروس رقم 2 الدورة الأولى 2017/2016	2 بكالوريا علوم رياضية مدة الإنجاز : أربع ساعات ذ : عبدالله بن الختير

➢ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم وجودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

❖ تمرين رقم 01: (1,5 نقطة)

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0 = 1$ و $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \sqrt{u_n^{\,2} + k^n}$ ، حيث $k \in]0,1[$.

✓ بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها بدلالة k .

❖ تمرين رقم 02: (1,5 نقطة)

⇦ لتكن f دالة عددية متصلة على $[0,1]$ و قابلة للإشتقاق على $]0,1[$ بحيث :

$f(1) = 0$ و $(\forall x \in]0,1[), f(x) \neq 0$.

✓ بتطبيق مبرهنة رول على دالة مناسبة ، بين أنه : $(\exists c \in]0,1[), \dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{-2}{c}$.

❖ تمرين رقم 03: (2,5 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = Arctan(x) - x + 1$.

1)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

2)- هل الدالة f^{-1} قابلة للإشتقاق في $x_0 = 1$ ؟ علل جوابك .

3)- بين أن f^{-1} قابلة للإشتقاق على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ و أن :

$(\forall x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[), 1 + (f^{-1})'(x) + \dfrac{1}{(f^{-1}(x))^2} = 0$.

❖ تمرين رقم 04: (04 نقط)

I- ليكن $x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ و لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0 = cos(x)$ و $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = u_n.cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$.

و لكل $n \in \mathbb{N}$ ، نضع : $v_n = u_n.sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

1)- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها وحدها الأول .

2)- عبر عن v_n بدلالة x و n ، ثم إستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \dfrac{sin(2.x)}{2^{n+1}.sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$.

3)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها بدلالة x .

II- نعتبر المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{\cos(x)} \\ (\forall n \in \mathbb{N}), b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}.b_n} \end{cases}.$$

1)- بين بالترجع أن ، لكل $n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$ و $b_n > 0$.

2)- أ- بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), a_n < b_n$.

ب- استنتج رتابة كل من المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3)- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < b_n - a_n \leq \dfrac{1}{2^n}.\left(\dfrac{1}{\cos(x)} - 1\right)$.

ب- استنتج أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان و لهما نفس النهاية l .

ج- بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{u_n.\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\cos^2(x)}$ و $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2(x)}$ ثم إستنتج قيمة l .

❖ تمرين رقم 05: (04 نقط)

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n = \frac{n}{2^n}.$$

1)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

2)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

⇦ لتكن f_n الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x \in [0,+\infty[), f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k.x^k \text{ ، حيث } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

3)- بين أن المعادلة : $(E_n) : f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا a_n في $]0,+\infty[$.

4)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), f_n(a_{n+1}) = 1 - (n+1).(a_{n+1})^{n+1}$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$.

5)- بين أن :

$$(\forall x \in [0,1[\cup]1,+\infty[), f_n(x) = \frac{x\left(n.x^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right)}{(x-1)^2}$$

6)- احسب a_2 ، ثم إستنتج كل نهاية مما يلي : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n.(a_n)^n$.

7)- بين أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

❖ **تمرين رقم 06: (6,5 نقطة)**

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\left(\forall x \in [0,+\infty[\right), f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} .$$

1)- بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا أفقيا ينبغي تحديده .

2)- أ- ادرس قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر ، ثم أول النتيجة هندسيا .

ب- بين أن : $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right), f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

3)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II- لتكن F دالة عددية قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ بحيث :

$$\left(\forall x \in [0,+\infty[\right), F'(x) = f(x) \text{ و } F(0) = 0 .$$

و نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي :

$$\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right), G(x) = F\left(\tan^2(x)\right) .$$

1)- بين أن G قابلة للإشتقاق على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ و أن :

$$\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right), G'(x) = 4.\tan^2(x)$$

2)- استنتج أن : $\left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right), G(x) = 4.\tan(x) - 4.x$.

3)- بين أن : $\left(\forall x \in [0,+\infty[\right), F(x) = 4.\sqrt{x} - 4.\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$.

III- لتكن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), S_n = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) .$$

1)- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أنه :

$$\left(\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}\right), \frac{1}{n}.f\left(\frac{k}{n}\right) \le F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \le \frac{1}{n}.f\left(\frac{k+1}{n}\right) .$$

2)- بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), 4-\pi \le S_n \le 4-\pi+\dfrac{1}{n}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

➢ تمارين إضافية:

❖ تمرين رقم 01:

✓ بين أنه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^2 . \sin\left(\dfrac{\pi}{x+\dfrac{1}{n}}\right)}{x} = (-1)^{n+1}.\pi$.

❖ تمرين رقم 02:

⇦ لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ و قابلة للإشتقاق على $]a,b[$.

✓ بين أنه : $(\exists c \in]a,b[), \dfrac{b.f(a)-a.f(b)}{b-a} = f(c) - c.f'(c)$.

❖ تمرين رقم 03:

⇦ لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث :

$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

و $(\forall x \in]a,b[), 1 + f'(x) + (f(x))^2 \geq 0$.

✓ بين أن : $b - a \geq \pi$.

❖ تمرين رقم 04:

⇦ لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث : $b - a \geq \pi$.

✓ بين أنه : $(\exists x_0 \in]a,b[), f'(x_0) < 1 + (f(x_0))^2$

❖ تمرين رقم 05:

⇦ لتكن f دالة عددية متصلة على $[0,1]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ بحيث :

$f(0) = f(1) = 0$ و $(\exists x_0 \in]0,1[), f(x_0) = 1$.

✓ بين أنه : $(\exists c \in]0,1[), |f'(c)| > 2$.

❖ تمرين رقم 06:

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x)$ ، حيث $x \in \mathbb{R}^*$.

✓ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_n| \leq \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❖ تمرين رقم 07:

✓ احسب نهاية المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي :

$$x_n = \frac{a + aa + \dots + \overbrace{aa\dots a}^{n \text{ chiffres}}}{10^n}\ ,\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$ حيث $a \in \{1,2,\dots,9\}$.

❖ تمرين رقم 08:

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0 = 0$ و $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^{\,2} + 8.u_n + 5}$.

✓ بين أن المتتاليتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان و حدد نهايتهما المشتركة ، حيث :

$(\forall n \in \mathbb{N}),\ x_n = \cos(\pi.u_n)$ و $(\forall n \in \mathbb{N}),\ y_n = \sin(\pi.u_n)$.

❖ تمرين رقم 09:

⇦ لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$x_1 = \dfrac{c}{2}$ و $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(c + x_n^{\,2}\right)$ ، حيث $c \in \mathbb{R}^{*+}$.

✓ حدد مجموعة قيم c من $\mathbb{R}^{*+}$ لكي تكون المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

❖ تمرين رقم 10:

⇦ لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$x_0 = 0$ و $(\forall n \in \mathbb{N}),\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + \dfrac{1}{2^n}}$.

1)- بين أن المعادلة : $(E_n),\ x^2 - x - \dfrac{1}{2^n} = 0$ تقبل حلا وحيدا y_n في $]0,+\infty[$ و أن :

$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}),\ x_n > y_n$.

2)- ادرس رتابة المتتالية $(x_n)_{n\geq 2}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة و أحسب نهايتها .