2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 03	منارة الفردوس
ذ : عبدالله بن لحتير	الدورة الثانية 2011/2010	نيابة الخميسات

Durée:04heures

التمرين رقم 01: $(2,5pts)$

1)- حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(\mathrm{E}): 7x-3y=1$.

2)- إستنتج مجموعة حلول النظمة : $(S):\begin{cases}7x-3y=1\\ x\equiv y^2\,[7]\end{cases}$ في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

3)- ليكن (a,b) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بحيث : $7a-3b=29$ و نضع : $d=a\wedge b$.

أ- حدد قيم العدد d الممكنة معللا جوابك .

ب- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ النظمة : $(S_1):\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\end{cases}$.

ج- نضع : $m=a\vee b$ ، حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ النظمة : $(S_2):\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$.

التمرين رقم 02: $(2,5pts)$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\mathrm{E}): z^2+2i\left(1-e^{i\theta}\right)z+4e^{i\theta}=0$ ، حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1)- أ- حدد الحلين z_1 و z_2 للمعادلة (E) .

ب- أكتب العدد العقدي : $Z=z_1+z_2$ على الشكل الأسي .

ج- حدد المحل الهندسي لمجموعة النقط $M(Z)$ عندما يتغير θ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=-2i$ و $b=\sqrt{3}-i$ و $c=2i.e^{i\theta}$.

أ- أكتب $Z_0=\dfrac{c-a}{b-a}$ على الشكل الأسي ، ثم إستنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب- أحسب $h=aff(H)$ ، حيث H هو مركز تعامد المثلث ABC .

■ التمرين رقم **03**: $\left(2{,}5pts\right)$

لتكن E مجموعة الدوال f القابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ بحيث :

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f''(x) = \left(1+x^2\right) f(x) .$$

1)- بين أن الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ و $h(x) = g(x) \times \int_0^x \frac{1}{\left(g(t)\right)^2} dt$

تنتميان إلى المجموعة E .

2)- بين أن $(\mathrm{E},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

3)- لتكن f دالة من E .

أ- بين أن الدالة $f'g - fg'$ ثابتة على $\mathbb{R}$.

ب- إستنتج أن الأسرة $\mathrm{B}(g,h)$ مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{E},+,\cdot)$.

4)- بين أن الأسرة $\mathrm{B}(g,h)$ تكون أساسا لفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{E},+,\cdot)$ و إستنتج $\dim(\mathrm{E})$.

■ التمرين رقم **04**: $\left(2{,}5pts\right)$

نعتبر المجموعة : $\mathrm{F} = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & ky \\ y & x \end{pmatrix}; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ حيث k عدد حقيقي ثابت .

1)- بين أن $(\mathrm{F},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

2)- نعتبر المصفوفتين : $I = M(1,0)$ و $J = M(0,1)$.

أ- بين أن الأسرة $\mathrm{B}(I,J)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{F},+,\cdot)$.

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ، أحسب إحداثيتي المصفوفة J^n في الأساس $\mathrm{B}(I,J)$.

3)- بين أن F جزء مستقر في $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times\right)$ و أن $(\mathrm{F},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية .

4)- نفترض أن $k \geq 0$ ، أحسب $M\left(\sqrt{k},1\right) \times M\left(-\sqrt{k},1\right)$. هل الحلقة $(\mathrm{F},+,\times)$ كاملة ؟

5)- نفترض أن $k < 0$ ، بين أن $(\mathrm{F},+,\times)$ جسم تبادلي .

■ **التمرين رقم 05**: $(6{,}5pts)$

⇦ **الجزء الأول**: $(2{,}5pts)$

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right) .$$

1)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) .

2)- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال ينبغي تحديده .

3)- أدرس تقعر المنحنى (C_f) و حدد نقطتي إنعطافه .

4)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث الوحدة هي $2cm$.

(ينبغي رسم المماسات عند كل من أصل المعلم و عند نقطتي الإنعطاف) .

5)- أرسم المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6)- ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، بين أن المعادلة : $(\mathrm{E}) : f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.

7)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة قطعا .

8)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N});\alpha_n \geq n$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⇦ **الجزء الثاني**: $(02pts)$

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1} = f(u_n) .$$

1)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .

2)- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

3)- بين أن : $(\forall x \in [0;1]);\ f(x) \leq x - \dfrac{x^2}{2}$ وإستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n^{\ 2} \leq 2(u_n - u_{n+1})$.

4)- مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ ، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^{\ 2}$.

⇦ بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا تأطيرا لنهايتها سعته $r = 1$.

⇦ **الجزء الثالث:** $(02pts)$

⇦ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، نضع : $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx$.

1)- أحسب التكاملين I_0 و I_1 ، و بين أن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة .

2)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \le I_n \le \dfrac{\ln 2}{n+1}$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx$.

4)- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \le \int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx \le \dfrac{1}{n+3}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

■ **التمرين رقم 06:** $(3,5pts)$

⇦ لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $f(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{e^{-t^2}}{t}\,dt$.

1)- أثبت أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^{*+}$.

2)- بين أن : $(\forall x \in]0;1]); f(x) \le e^{-x^4}\ln x$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

3)- بين أن : $(\forall x \in [1;+\infty[); e^{-x^4}\ln x \le f(x) \le e^{-x^2}\ln x$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \dfrac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}$.

5)- أثبت أن المعادلة : $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث : $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

6)- ضع جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(نعطي : $\alpha \simeq 1,2$ و $f(\alpha) \simeq 0,03$) .

إنتهى الموضوع .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .


pour obtenir une
structure squelettique,
il faut un ensemble d'os et
une loi de décomposition
des chairs