الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فـاس- بولمان نيـابة فاس الجديد	مـــادة الريـــاضيــات الامتحان التجريبي 3 2011-2012	الثانية علوم رياضية أ و ب مدة الإنجاز : 4 ساعات المعامل : 9

التمريــــن الأول 3نقطة

نذ كر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية. ; و $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء منجهي حقيقي

نضع $E=\left\{M_{(a,b)}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي	0,5
2) نضع: $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ بين أن (I,J) أساس للفضاء $(E,+,.)$	0,25
3) تحقق أن : $J^2=I$	0,5
واستنتج $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall(a',b')\in\mathbb{R}^2 : M_{(a,b)}\times M_{(a',b')}=M_{(aa'+bb',\ ab'+ba')}$	0,5
4) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية وغير كاملة	
5) نضع $A=M_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ و $B=M_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$	
أ- بين أن (A,B) أساس في $(E,+,.)$	0,25
ب- حدد إحداثيات $M_{(a,b)}$ بالنسبة للأساس (A,B)	0,25
ت- تحقق أن $A\times B=0_2$ و $A^2=A$ ونقبل أن $B\times A=0_2$ و $B^2=B$	0,25
6)نعتبر المجموعة $G=\left\{e^xA+e^{-2x}.B / x\in\mathbb{R}\right\}$ بين أن $(G;\times)$ زمرة تبادلية	0,5

التمرين الثاني 3.5 نقطة

الجزء الأول

ليكن $a\in\mathbb{C}$ ونعتبر المعادلة: $z^2-(1+i)(a+2i)z+ia^2-4(a+i)=0$

z_1 و z_2 هما حلي المعادلة حيث z_2 يصبح حقيقيا في حالة $a=0$

1- أ- ليكن Δ مميز المعادلة بين أن $\Delta=\left((1-i)(a+2i)\right)^2$	0,25
ب- بين أن $z_1=a+2i$ و $z_2=-2+ai$	0,25
2- في هذا السؤال نفترض أن $a=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ أكتب z_1 على الشكل المثلثي	0,25

الجزء الثاني

المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1};\vec{e_2})$

نعتبر النقط $A(z_1)$ و $B(z_2)$ و $\Omega(-2+2i)$

1- بين أن النقط $A(z_1)$ و $B(z_2)$ و $\Omega(-2+2i)$ مستقيمية إذا وفقط إذا $\lvert a\rvert=2$	0,75
2- بين أن $\Omega A=\Omega B \Leftrightarrow a\in i\mathbb{R}$	0,75

3- نفترض أن $\|a\|\neq 2$ ليكن الدوران R الذي مركزه $\Omega(-2+2i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$	
أ- بين أن الصيغة العقدية للدوران R هي $z'=iz+4i$	0,25
ب-حدد بدلالة a لحق النقطة C صورة A بالدوران R	0,25
ت-لتكن D نقطة من المستوى حيث $R(D)=B$ بين أن $z_D=a-4+2i$	0,25
ث-بين أن $AD=BC$ و $AD\perp BC$	0,5
التمرين الثالث 3 نقطة	
في كل ما سيأتي نضع لكل $\forall x\in\mathbb{Q}:P(x)=2x^4+3x+1$	
1- ليكن $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ حيث $\alpha\wedge\beta=1$ نفترض أن $P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\in\mathbb{Z}$	
أ- ليكن $u\in\mathbb{Z}$ حيث $P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=u$ بين أن $2\alpha^4=\beta\left(u\beta^3-3\alpha\beta^2-\beta^3\right)$	0,25
ب- استنتج أن $\beta/2$	0,25
ت- بين أن $\beta=1$	0,5
2- استنتج إن لكل $x\in\mathbb{Q}$: $\left(P(x)\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\right)$	
3- في هذا السؤال نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة $(E):P(x)\equiv 0[10]$	0,5
أ- بين أنه إذا كان x حلا للمعادلة (E) فإن $x\wedge 10=1$ يمكن استعمال مبرهنة BEZOUT	0,5
ب-باستعمال مبرهنة fermat بين أنه إذا كان x حلا للمعادلة (E) فإن $\begin{cases}x\equiv 1[2]\\ x\equiv -1[5]\end{cases}$	0,5
ت-استنتج أن x حلا للمعادلة (E) **إذا وفقط إذا** $\begin{cases}x\equiv 1[2]\\ x\equiv -1[5]\end{cases}$	0,5
ث-بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\{-1+10k/k\in\mathbb{Z}\}$	
مـــــســــــــــألـــــــــــة 10.5pts	
الجــــــــــزء الأول	
(1 أثبت أن المعادلة $\ln(x)+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in\mathbb{R}^*_+$ و أن $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$ نأخذ $\ln 2\approx 0.7$	0.5
(2 ضع جدول إشارة $\ln(x)+x+1$ لكل $x>0$	0.25
(3 نضع $\forall x>0:\varphi(x)=e^{-1-x}$	
أ- بين التكافؤ الآتي $\forall x>0:\varphi(x)=x\Leftrightarrow x+\ln(x)+1=0$ و استنتج أن α هو الحل الوحيد للمعادلة $\varphi(x)=x$ على $\mathbb{R}^*_+$	0.25
ب-بين أن $\forall x\in[0,1]:\|\varphi'(x)\|\leq e^{-1}$	0.25

4) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$

أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in [0,1]$ 0.25

ب- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq e^{-n}$

ت- استنتج المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها 0.5

ث- حدد أصغر صحيح طبيعي n لكي تكون u_n قيمة مقربة للعدد α بالدقة 10^{-2} 0.25

الجـــــــزء الثـــــاني

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي 0.25

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} \ , \ x \in]0,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة المحصلة

2- بين أن متصلة على $\mathbb{R}^+$

3- أدرس قابلية اشتقاق على اليمين في 0 وأول هندسيا النتيجة المحصلة

4- أ- بين أن $f(\alpha) = -\alpha$ 0.5

ت-إحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات f يمكن السؤال2 الجزء الاول 0.5

ث-أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $I(1;0)$ 0.5

5- أثبت أن $f''(x) = \dfrac{h(x)}{x(x+1)^3}$ لكل $x \in]0,+\infty[$ حيث $h(x) = -x^2 + 1 - 2x\ln x$ 0,25 0.25

6- أ-أدرس تغيرات الدالة h يمكن استعمال السؤال2 الجزء الاول 0.25

ب-استنتج أن النقطة $I(1;0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C)

ت-أنشئ المنحنى (C) والمماس (T) نأخذ $\alpha \approx 0.275$. 0,5

الجـــــــزء الثـــــالث

0.5

0,25

1- بين لكل $n \in \mathbb{N}^*$ المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا و حيدا $a_n \in [1;+\infty[$ 0,5

2- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \geq e^n$ واستنتج نهاية المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$

3- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين $\forall t \in \mathbb{R}^+ : \ln(1+t) \leq t$

4- بين مستعملا مكاملة بالأجزاء أن $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \int_0^x \ln(1+t)dt = (x+1)\ln(x+1) - x$ 0,25

0,25

5- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq (x+1)\ln(x+1) - x \leq \dfrac{x^2}{2}$ 0,25

6- أ-لكل $n\in\mathbb{N}^*$ نضع $b_n=a_ne^{-n}-1$ بتطبيق السؤال السابق من أجل $x=b_n$ بين أن $0\le a_ne^{-n}\ln\left(a_ne^{-n}\right)-b_n\le\frac{1}{2}\left(b_n\right)^2$	0.25
-7 أ- بين أن $a_ne^{-n}\ln\left(a_ne^{-n}\right)=ne^{-n}$ وأن $b_n\le ne^{-n}$	0,25
ب-استنتج أن $0\le ne^{-n}-b_n\le\frac{1}{2}n^2e^{-2n}$	0,25
ت-أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{b_n}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e^nb_n}}{\mathrm{n}}$	0.25
الجـــــــــزء الرابع	0.25
نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي $F(x)=\int_1^{e^x}f(t)\,dt$	0.25
1- علل وجود $F(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}^+$	0.25
2- بين أن $\forall t\ge1:\frac{1}{2}\ln t\le f(t)\le t\ln t$	
3- باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^{e^x}\ln(t)dt$ و $\int_1^{e^x}t\ln(t)dt$	0,25 0,25
4- باستعمال نتيجة السؤال 2 بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$	0. 5
5- بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ وأحسب مشتقها	0,5 0,25