ثانوية رحال المسكيني التأهيلية البروج	فرض منزلي 2 ـ الدورة الأولى	السنة الدراسية 2008/2007
نيابة إقليم سطات	جذع مشترك علوم	ذ. أسويدي محمد

التمرين الأول

① احسب مايلي : $A=\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}+\frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3}$; $B=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}+2$; $C=10^{100}\times(-0,00032)^{20}\times(-0,0625)^{25}$

② عمل ما يلي : $E=x^2y\sqrt{x}+3x^2y\sqrt{y}+3xy^2\sqrt{x}+xy^2\sqrt{y}$ مع x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

التمرين الثاني

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتين $A(-1;-2)$ و $B(-2;0)$

والمستقيم (D) الذي معادلته الديكارتية : $(D): x+3y-3=0$.

① حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من A و B

② حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

③ بين أن المستقيمين (D) و (Δ) متقاطعان ، وحدد زوج إحداثيتي I نقطة تقاطعهما.

④ ليكن (L) المستقيم المعرف بالتمثيل البارامتري : $(L):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-3-4t\end{cases}$ $/t\in\mathbb{R}$

بين أن (L) و (Δ) مستقيمان متوازيان

⑤ ليكن المستقيم (D') المار من النقطة $E(3;-7)$ والموجه بالمتجهة $\vec{v}(1;3)$. بين أن المستقيمان (D) و (D') متعامدان

⑥ أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيمات (D) و (D') و (L) و (Δ)

التمرين الثالث

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$

① تحقق من أن : $x+\sqrt{x}-2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$

② بين أن : $0\le\sqrt{x}-1\le\frac{1}{2}(x-1)$

③ i / بين أن : $\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}(x+\sqrt{x}-2)$

ii / استنتج أن : $\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)=(\sqrt{x}-1)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

④ نفترض أن x ينتمي إلى المجال $]1;1+r]$ حيث : $r\in\mathbb{R}_+^*$

i / بين أن: $(\sqrt{x}-1)^2\le\frac{r^2}{4}$ وأن : $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{3}{2}$.

ii / استنتج أن : $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)\right|\le\frac{3r^2}{8}$

⑤ أوجد قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ بالدقة 6.10^{-8}

يعاد يوم الخميس 2007/11/29

التمرين الأول

① لنحسب : $C = 10^{100} \times (-0,00032)^{20} \times (-0,0625)^{25}$ ؟

لدينا : (لأن الأس ع دد ف ردي) $(-0,0625)^{25} = -(0,0625)^{25}$

$$= -\left(625\times 10^{-4}\right)^{25}$$

$$= -\left(5^4 \times 10^{-4}\right)^{25} = -5^{100} \times 10^{-100}$$

ولدينا : (لأن الأ س عدد زوجي) $(-0,00032)^{20} = (0,00032)^{20}$

$$= \left(32\times 10^{-5}\right)^{20}$$

$$= \left(2^5 \times 10^{-5}\right)^{20}$$

$$= 2^{100} \times 10^{-100}$$

إذن $C = -10^{100} \times 2^{100} \times 10^{-100} \times 5^{100} \times 10^{-100}$

أي $C = -10^{100-100} \times (2\times 5)^{100} \times 10^{-100}$

$$= -10^{100-100} \times 10^{100-100} = -10^0 = -1$$

وبالتالي $\boxed{C = -1}$

لنحسب : $B = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}} + 2$ ؟ ، $A = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3} + \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3}$ ؟

$$B = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}} + 2$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)} + 2$$

$$= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-2} + 2$$

$$= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}} - \cancel{2\sqrt{2}} + \cancel{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$A = \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3} + \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3} = \frac{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2 + \left(2\sqrt{3}+3\right)^2}{\left(2\sqrt{3}+3\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)}$$

$$= \frac{12-12\sqrt{3}+9+12+12\sqrt{3}+9}{12-9}$$

$$= \frac{42}{3} = 14$$

② لنعمل $E = x^2y\sqrt{x} + 3x^2y\sqrt{y} + 3xy^2\sqrt{x} + xy^2\sqrt{y}$ مع x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

لدينا :

$$E = x^2y\sqrt{x} + 3x^2y\sqrt{y} + 3xy^2\sqrt{x} + xy^2\sqrt{y}$$

$$= xy\left(x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} + y\sqrt{y}\right)$$

$$= xy\left(\left(\sqrt{x}\right)^3 + 3\left(\sqrt{x}\right)^2\sqrt{y} + 3\sqrt{x}\left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^3\right) = xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3$$

إذن $\boxed{E=xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}$

التمرين 2

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقطتين $A\left(-1;-2\right)$ و $B\left(-2;0\right)$

والمستقيم (D) الذي معادلته الديكارتية : $(D):x+3y-3=0$.

① لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من A و B

لدينا : $(\Delta)=D\left(A;\overrightarrow{AB}\right)$ و $A\left(-1;-2\right)$ و $\overrightarrow{AB}\left(-1;2\right)$

- لتكن M(x;y) نقطة من المستوى $(\wp)$

$M\left(x;y\right)\in(\Delta)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}\left(x+1;y+2\right)$ و $\overrightarrow{AB}\left(-1;2\right)$

يكافئ $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0$

يكافئ $\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ y+2 & 2 \end{vmatrix}=0$

يكافئ $2x+y+4=0$ إذن معادلة ديكارتية لـ (Δ) هي : $\boxed{(\Delta):2x+y+4=0}$

② تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) .

لدينا : $(D):x+3y-3=0$ إذن $\vec{u}\left(-3;1\right)$ متجهة موجهة له ويمر من النقطة $C\left(0,1\right)$ **<u>(تأكد من ذلك)</u>**

وبالتالي تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D): $\left(t\in\mathbb{R}\right)\ \begin{cases} x=-3t \\ y=1+t \end{cases}$.

③ لنبين أن المستقيمين (D) و (Δ) متقاطعان .

لدينا : $\vec{u}\left(-3;1\right)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) .

$\overrightarrow{AB}\left(-1;2\right)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

ولدينا : $\det\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-6+1=5\neq0$ إذن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مستقيميتين وبالتالي (D) و (Δ) متقاطعان

- لنحدد زوج إحداثيتي I نقطة تقاطعهما.

لتكن I(x;y) هي نقطة تقاطع (D) و (Δ) .

بما أن $I\left(x,y\right)\in(\Delta)$ فإنه توجد t من $\mathbb{R}$ بحيث $I\left(-3t;1+t\right)$

وبما أن $I\left(-3t,1+t\right)\in(D)$ فإن $2\left(-3t\right)+\left(1+t\right)+4=0$ أي $-5t+5=0$ أي $t=1$

وبالتالي زوج إحداثيتي النقطة I في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ هو : $\left(-3;2\right)$.

④ ليكن (L) المستقيم المعرف بالتمثيل البارامتري : $/t\in\mathbb{R}$ $(L):\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3-4t \end{cases}$

إذن : $\vec{v}\left(2;-4\right)$ متجهة موجهة لـ (L)

ونعلم أن : $\overrightarrow{AB}\left(-1;2\right)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

بما أن : $\det\left(\vec{v};\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=4-4=0$ فإن **(L) و (Δ) مستقيمان متوازيان**

⑤ ليكن المستقيم (D') المار من النقطة $E\left(3;-7\right)$ والموجه بالمتجهة $\vec{v}\left(1;3\right)$

ولدينا $\vec{u}\left(-3;1\right)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) .

حسب شرط تعامد مستقيمين : ($aa'+bb'=0$ حيث $b'=3$ و $a'=1$ و $b=1$ و $a=-3$) نجد : $(-3)\times 1+3\times 1=0$

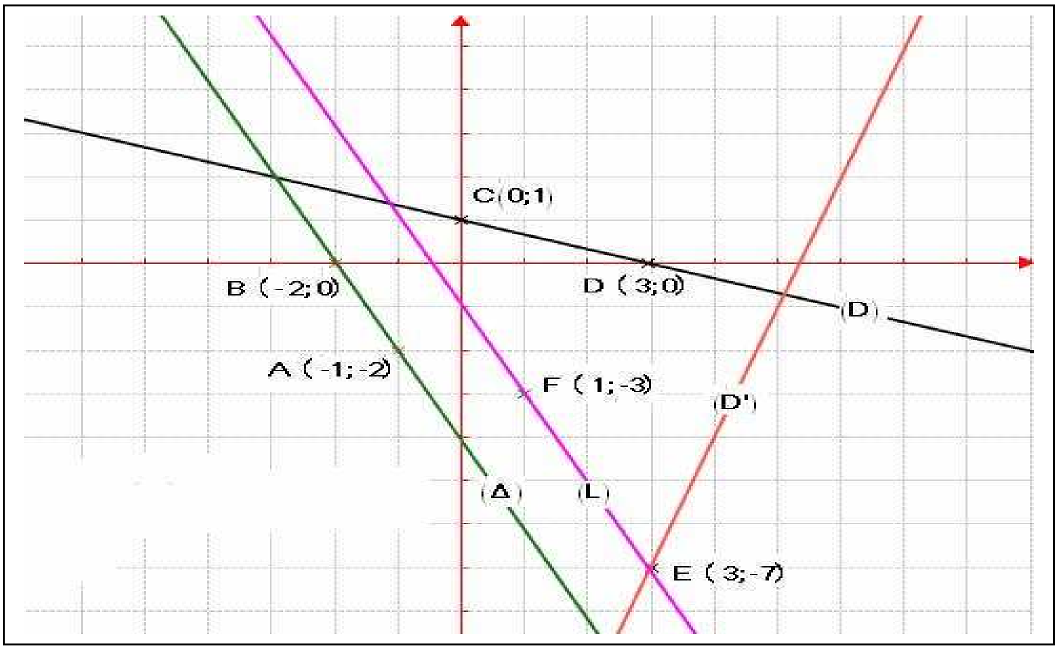
إذن (D) و (D') متعامدان

⑥ لننشئ نشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيمات (D) و (D') و (L) و (Δ)

لدينا $(D): x+3y-3=0$ إذن : (D) يمر من النقطتين : $C(0,1)$ و $D(3;0)$ **(تأكد من ذلك)**

ولدينا (D') عمودي على (D) ومار من $E(3;-7)$

و (Δ) مار من $A(-1;-2)$ و $B(-2;0)$ و (L) مواز لـ(Δ) ومار من $F(1;-3)$.



التمرين 3

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$

① لنتحقق من أن : $x+\sqrt{x}-2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$

لدينا : $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}-\sqrt{x}-2$

$=x+\sqrt{x}-2$

إذن $\boxed{x+\sqrt{x}-2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$

② بين أن : $0\leq\sqrt{x}-1\leq\frac{1}{2}(x-1)$

لدينا $x\in[1;+\infty[$ يعني $1\leq x$ ومنه $0\leq\sqrt{x}-1$ ①

ومن جهة أخرى لدينا : $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$ ②

وبما أن $x\geq 1$ فإن $\sqrt{x}+1\geq 2$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{x}+1}\leq 1$ وبالتالي $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\leq\frac{1}{2}(x-1)$ ③ (لأن $x-1\geq 0$)

من ① و ② و ③ نستنتج أن $\boxed{0\leq\sqrt{x}-1\leq\frac{1}{2}(x-1)}$

③ i / لنبين أن : $\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}(x+\sqrt{x}-2)$

لدينا :

$$\frac{(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}(x+\sqrt{x}-2) = \frac{(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(x-2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x\sqrt{x}+\cancel{2x}-\cancel{2x}-4\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{2}-1-\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)$$

إذن $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)=\frac{(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}(x+\sqrt{x}-2)}$

ii / لنستنتج أن : $\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)=(\sqrt{x}-1)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right) = \frac{(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}(x+\sqrt{x}-2)$$
$$= (\sqrt{x}-1)^2\frac{(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}$$
$$= (\sqrt{x}-1)^2\left(\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}}+\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right)$$
$$= (\sqrt{x}-1)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

إذن $\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right) = (\sqrt{x}-1)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$

④ نفترض أن x ينتمي إلى المجال $]1;1+r]$ حيث : $r\in\mathbb{R}_+^*$.

i – لنبين أن $(\sqrt{x}-1)^2\le\frac{r^2}{4}$

لدينا : $x\in[1\,;\,1+r]$ يعني $1\le x\le 1+r$ ومنه $0\le x-1\le r$ أي $0\le\sqrt{x}^2-1^2\le r$

أي $0\le(\sqrt{x}-1)\le\frac{r}{(\sqrt{x}+1)}$ (لأن $\sqrt{x}+1>0$)

وبما أن $1\le x$ فإن $1\le\sqrt{x}$ ومنه $\frac{1}{1+\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}$ وبالتالي $0\le(\sqrt{x}-1)\le\frac{r}{2}$ إذن $\boxed{(\sqrt{x}-1)^2\le\frac{r^2}{4}}$

لنبين أن $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{3}{2}$ لدينا : $1\le\sqrt{x}$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{x}}\le 1$ وبالتالي $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{3}{2}$

iii / استنتج أن : $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)\right|\le\frac{3r^2}{8}$

حسب نتيجة السؤال ③ /ii/ لدينا $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)\right|=\left|\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right|$ ①

وبما أن $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\leq\frac{r^2}{4}$ و $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\leq\frac{3}{2}$ فإن $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq\frac{r^2}{4}\times\frac{3}{2}$

أي $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq\frac{3r^2}{8}$

وبما أن $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\geq 0$ فإن $\left|\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right|=\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ②

من ① و ② نستنتج أن : $\boxed{\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\left(1-\frac{1}{2}(x-1)\right)\right|\leq\frac{3r^2}{8}}$ ③

⑤ لنحدد قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ بالدقة 6.10^{-8}

نأخذ $r=4\times10^{-4}$ و $x=1,0004$ و لدينا $1,0004\in[1;1,0004]$

إذن حسب النتيجة ③ يكون لدينا $\left|\frac{1}{\sqrt{1,0004}}-\left(1-\frac{1}{2}(1,0004-1)\right)\right|\leq\frac{3\left(4\times10^{-4}\right)^2}{8}$

أي $\left|\frac{1}{\sqrt{1,0004}}-(0,9998)\right|\leq 6\times10^{-8}$

إذن 0,9998 قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ بالدقة 6.10^{-8}

=*

I. Valeur absolue

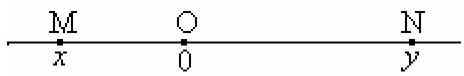
a) Distance entre deux réels

Définition : La **distance** entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|x-y|$ ou encore $|y-x|$.
$|x-y|$ se lit « valeur absolue de x moins y ».

Exemples : • $|3-5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à 5 – 3 = 2.
• $|-2-3|$ est la distance entre les réels –2 et 3. Cette distance est égale à 3 – (-2) = 5.

Interprétation graphique de $|x-y|$

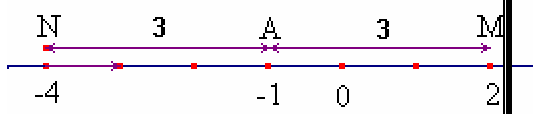
Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y.



$|x-y|$ est la distance entre les points M et N, c'est à dire MN.

Application : Soient A, B et M trois points distincts d'une droite graduée. On note a, b et x les abscisses respectives des points A, B et M.
L'égalité $|x-a|=|x-b|$ se traduit par MA = MB, avec A, B et M alignés :
cela signifie que M est le milieu du segment [AB].

Exercice : Trouver tous les nombres x tels que $|x+1|=3$.
A et M sont les points d'abscisses respectives –1 et x sur une droite graduée :
AM = $|x-(-1)|$ = $|x+1|$
Trouver tous les nombres x tels que $|x+1|=3$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que AM = 3.



Les nombres cherchés sont donc : 2 et –4.