Exercice 1: (Juin 2019 : 3 pts)

On admet que 2969 (l'année Amazighe actuelle) est un nombre premier. Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 = 0 \quad [2969]$

1. On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n
   a. En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in Z) : u \times n \equiv 1[2969]$
   b. En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1[2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$. (On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)
   c. Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$
   d. En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$
2. a. En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n
   b. Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 0[2969]$ et $m \equiv 0[2969]$

Exercice 2: (Juin 2018 : 3 pts)

Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k \ (k \in \mathbb{N}^*)$

1. Montrer que pour tout entier relatif x , si $x^2 \equiv 1\,[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1\,[p]$.
2. Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5} \equiv 1\,[p]$.
   a. Montrer que x et p sont premiers entre eux.
   b. Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1\,[p]$.
   c. Vérifier que : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$.
   d. En déduire que : $x^2 \equiv 1\,[p]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l' équation : $x^{62} \equiv 1\,[67]$.

Exercice 3: juin 2017

On admet que 2017 est premier et que $2016 = 2^5.3^2.7$ et soit p un nombre premier tel que $p \geqslant 5$

1. Soit (x, y) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$
   a. Vérifier que $p < 2017$.
   b. Montrer que p ne divise pas y .
   c. Montrer que $y^{p-1} \equiv 1\,[p]$ puis en déduire que p divise 2016 .
   d. Montrer que $p = 7$.
2. Déterminer suivant les valeurs de p, les couples (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$.

Exercice 4: juin 2016

Partie I : Soit (a, b) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$.

1. Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171}\,[173]$. $(171 = 3 \times 57)$.
2. Montrer que $173 \mid a$ si et seulement si $173 \mid b$.
3. On suppose que $173 \mid a$. Montrer que $173 \mid a + b$.

4. On suppose que 173 ne divise pas a .

a. En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $a^{172} \equiv b^{172}\,[173]$.

b. Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0\,[173]$.

c. En déduire que : $173 \mid a+b$.

Partie II : On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante $(E) : x^3 + y^3 = 173(xy+1)$. Soit (x,y) une solution de l'équation (E). On pose : $x^3 + y^3 = 173k$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$.

2. Montrer que : $k = 1$, puis résoudre l'équation (E).

Exercice 5: juin 2015

Soit x un entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

1. Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux .

2. Soit d un diviseur commun de x et 2015.

a. Montrer que d divise 1436.

b. En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

3. a. En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $x^{1440} \equiv 1[5]$, $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$. ($Remarquer\, que$: $2015 = 5 \times 13 \times 31$) .

b. Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis en déduire que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

4. Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$.

Exercice 6: extrait de juillet 2015

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1[13]$.

2. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{2015} \equiv 2[13]$ et soit x une solution de (E).

a. Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b. Montrer que : $x \equiv 7[13]$.

3. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{7 + 13k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 7: juin 2014

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \underbrace{\overline{33...31}}_{n\, fois\, le\, chiffre\, 3}$

1. Vérifier que a_1 et a_2 sont premiers.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.

3. Montrer que Pour tout k de $\mathbb{N}$, $10^{30k+2} \equiv 7[31]$.

4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{30k+1} \equiv 0[31]$ puis en déduire que $31 \mid a_{30k+1}$.

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $n \equiv 1[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 8: juillet 2014

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $b_n = 2.10^n + 1$ et $c_n = 2.10^n - 1$.

1. Montrer que $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ puis en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
2. Trouver un couple (x_n, y_n) de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $b_n x_n + c_n y_n = 1$.

Exercice 9: juin 2013

On cherche les entiers naturels n supérieurs strictement à 1, vérifiant la relation :

$$(R) : 3^n - 2^n \equiv 0[n]$$

.

1. On suppose que n vérifie la relation (R) et soit p le plus petit diviseur positif premier de n.
   a. Montrer que $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ et en déduire que $p \geqslant 5$.
   b. Montrer que $3^{p-1} \equiv 1[p]$ et $2^{p-1} \equiv 1[p]$.
   c. Montrer que $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$
   d. Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par $p - 1$.
   $(a = q(p-1) + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < p - 1)$
   - Montrer que : $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $rn = 1 + k(p-1)$.
2. En déduire qu'il n'existe aucun entier naturel ≥ 2 vérifiant la relation (R) .

Exercice 10: juin 2012

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$.

1. a. Déterminer $195 \wedge 143$, puis en déduire que (E) admet des solutions.
   b. Sachant que $(-1, -1)$ est une solution de (E), résoudre (E) en précisant les étapes de la résolution
2. Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a : $n^{4k} \equiv 1\,[5]$
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x \equiv y\,[4]$
   a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $n^x \equiv n^y\,[5]$.
   b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $n^x \equiv n^y\,[10]$.
4. $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que (x, y) soit solution de (E).
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre d'unités dans la base décimale.

Exercice 11: juillet 2012

1. a. Vérifier que 503 est nombre premier.

   b. Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$, puis en déduire que : $7^{2008} \equiv 1[503]$

2. On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $49x - 6y = 1$. Sachant que le couple $(1, 8)$ est une solution de (E), résoudre (E) en précisant les étapes de la résolution.

3. On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + ... + 7^{2007}$

   a. Vérifier que le couple $(7^{2006}, N)$ est une solution de l'équation (E).

   b. Montrer que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

   c. En déduire que N est divisible par 2012.

Exercice 12: Juillet 2011

Soit x un entier naturel vérifiant $10^x \equiv 2\,[19]$.

1. a. Vérifier que $10^{x+1} \equiv 1\,[19]$.

   b. Montrer que le nombre $10^{18} \equiv 1\,[19]$.

2. Soit d le pgcd de 18 et $x + 1$.

   a. Montrer que $10^d \equiv 1\,[19]$

   b. Montrer que $d = 18$.

   c. En déduire que $x \equiv 17\,[18]$

Exercice 13: juin 2011

Soit N l'entier naturel représenté dans la base décimale par $N = \underbrace{\overline{111...11}}_{2010 fois}$.

1. Montrer que N est divisible par 11 .

2. a. Vérifier que 2011 est premier et que $10^{2010} - 1 = 9N$

   b. Montrer que le nombre 2011 divise $9N$.

   c. En déduire que le nombre 2011 divise N .

3. Montrer que le nombre N divise 22121 .

Exercice 14: juin 2010

1. Déterminer les entiers relatifs m vérifiant $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

2. Soit p un nombre premier tel que $p = 3 + 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et soit n un entier naturel tel que $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

   a. Vérifier que $(n^2)^{2k+1} \equiv -1[p]$.

   b. Montrer que n et p sont premiers entre eux.

   c. En déduire que $(n^2)^{2k+1} \equiv 1[p]$.

   d. Déduire qu'il n'existe aucun entier naturel n vérifiant $n^2 + 1 \equiv 0[p]$.

Exercice 15: juin 2009

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1. a. Vérifier que a_n est pair pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   b. Déterminer les valeurs de n pour que $a_n \equiv 0[3]$
2. Soit p un nombre premier tel que p > 3.
   a. Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$, $3^{p-1} \equiv 1[p]$ et $6^{p-1} \equiv 1[p]$.
   b. Montrer que : p divise a_{p-2}
3. Montrer que pour tout nombre entier naturel premier q , il existe un entier naturel non nul n tel que $a_n \wedge q = q$

Exercice 16: juin 2008

I). On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 35u - 96v = 1$.

1. vérifier que le couple $(11, 4)$ est une solution de (E) .
2. En déduire l'ensemble de solutions de (E) .

II). On considère l'équation dans $\mathbb{N}$ $(F) : x^{35} \equiv 2\,[97]$

1. Soit x une solution de (F)
   a. Montrer que 97 est premier et que les nombres x et 97 sont premiers entre eux .
   b. Montrer que : $x^{96} \equiv 1\,[97]$.
   c. Montrer que $x \equiv 2^{11}\,[97]$.
2. Montrer que si $x \equiv 2^{11}\,[97]$ alors x est solution de (F)
3. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) est $S = \{11 + 97k/k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 17: Juillet 2007

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système : $(S)\begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[q] \end{cases}$ où a, b, p et q sont des entiers relatifs tel que : $p \wedge q = 1$

1. a. Montrer que $\exists\,(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 / pu_0 + qv_0 = 1$.
   b. Montrer que $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est solution de (S).
2. Soit x une solution de (S). Montrer que le nombre pq divise $x - x_0$.
3. Soit x un entier relatif tel que pq divise $x - x_0$. Montrer que x est solution de (S) .
4. En déduire l'ensemble de solutions de x.
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $(S)\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\,[13] \end{cases}$

Exercice 18:

I). Soit l'équation : $(E) : 2x^4 + x - 1 \equiv 0[10]$ dans $\mathbb{Z}$.

1. Soit x une solution de (E) .
   a. Montrer que $10 \wedge x = 1$
   b. En déduire que $x \equiv -1[10]$.
2. Déterminer l'ensemble de solutions de (E) .

II). On considère dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $(F) : 2x^4 + x - 1 = 0$.

1. Montrer que l'équation (F) admet une unique solution λ dans $\mathbb{R}^+$ et que $\lambda \in]0, 1[$.
2. Montrer que $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 19: Extrait d'un devoir 2011

I). On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 21u - 52v = 1$

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution de (E) .
2. En déduire l'ensemble de solutions de (E) .

II). On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation $(F) : x^{21} \equiv 2\,[53]$

1. Soit x une solution de (F)
   a. Montrer que 53 est premier et que les nombres x et 53 sont premiers entre eux .
   b. Montrer que : $x^{52} \equiv 1\,[53]$.
   c. Montrer que $x \equiv 2^5\,[53]$.
2. Montrer que si $x \equiv 2^5\,[53]$ alors x est solution de (F)
3. Montrer que l'ensemble de solutions de l'équation (F) peut s'écrire $S = \{-21 + 53k / k \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 20:

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ n^{13} \equiv n[78]$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ 42 | n(n^6 - 1)$.
3. Déterminer les nombres premiers p divisant $2^p + 1$.
4. On pose $n = \underbrace{99\cdots9}_{330 \text{ chiffres}}$. Montrer que $331|n$
5. Montrer que pour tout a de $\mathbb{N}^* - \{1\}$: $\overline{10101}_{(a)}$ est non premier.

Exercice 21: Devoir

On note par (D), le système de numération duodécimal (base 12) et par convention, on pose $(\alpha = 10)$ et $(\beta = 11)$.

1. a. Le nombre $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$. est écrit dans la base (D). Écrire N_1 dans la base décimale.
   b. Écrire dans le système (D),le nombre $N_2 = 1131$.
   c. Déduire que $N_1 + N_2 = \overline{1701}^{12}$.
2. Dans le système (D), on considère le nombre : $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$.

a. Montrer que $N \equiv a_0\,[3]$, puis déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit dans la base (D).

b. En utilisant l'écriture de N_2 dans le système (D) , montrer qu'il est divisible par 3.

c. Montrer que $N \equiv a_0 + a_1 + ... + a_n[11]$.

d. En utilisant l'écriture dans la base (D) , vérifier que la divisibilité de N_1 par 11.

3. Déterminer les valeurs des deux chiffres x et y pour que le nombre $N = \overline{x4y}^{12}$ soit divisible par 33.

Exercice 22: Devoir

Soient p et q deux entiers naturels premiers tels que : $p \leq q$ et $10^{p+q-1} \equiv 1[pq]$.

1. a. montrer que $p \wedge 10 = 1$.

b. En déduire que $10^{p-1} \equiv 1[p]$ et $10^q \equiv 1[p]$.

2. a. Montrer que : $(p-1) \wedge q = 1$.

b. Prouver que $p = 3$.

c. En déduire que $10^{q+2} \equiv 1[q]$.

3. Décomposer $10^3 - 1$ en facteurs premiers , puis prouver que $q \in \{3, 37\}$.

Exercice 23: Devoir

1. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $4x - 5y = 1$.

b. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$, du système : $\begin{cases} x \equiv 3\,[5] \\ x \equiv 2\,[4] \end{cases}$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $a = 4n + 3$ et $b = 3n + 1$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a \wedge b = (n+2) \wedge 5$ puis en déduire les valeurs de l'entier naturel n tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, a \wedge b = 5$.

b. Montrer que : $2^a + 3^b \equiv 0[5] \Leftrightarrow 2^{a+b} \equiv 4[5]$.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $(S') \begin{cases} n \geq 2018 \\ 2^a + 3^b \equiv 0[5] \\ a \wedge b = 5 \end{cases}$.

3. Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.
Montrer que : $2^a + 3^b \equiv 0[5] \Leftrightarrow p = 5$.

Exercice 24: Devoir

Dans le système décimal , on considère l'entier naturel $a_n = \underbrace{111...11}_{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \equiv 1[2]$ et $a_n \equiv 1[5]$.

2. Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel non nul n, tel que : $a_n \equiv 0[3]$.

3. Soit p un nombre premier tel que $p > 5$.

- Montrer en utilisant le théorème de Fermat que : $a_{p-1} \equiv 0[p]$.

4. a. Vérifier que pour tout couple (m,n) de $(\mathbb{N}^*)^2$ on a : $m > n \Rightarrow a_m - a_n = 10^n a_{m-n}$.

   b. Soit q un entier naturel tel que $q \leq 2$ et $q \wedge 10 = 1$.
   - Montrer que : $\exists n \in \mathbb{N}^* : a_n \equiv 0[q]$.

5. Quels sont les entiers naturels non nuls qui admet au moins un multiple s'écrivant dans le système décimal sous la forme a_n.

Exercice 25: Devoir

Pour tout entier naturel n, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$

1. Vérifier que pour $0 \leq n \leq 4$, F_n est premier.
   (On admet que $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6700417$)
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$
3. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : F_n - 2 = F_0 F_1 \dots F_{n-1}$.

   b. Déduire que $\forall n, m \in \mathbb{N} : F_n \wedge F_m = 1$.

   c. Montrer que $\operatorname{card}(\mathbb{P}) = +\infty$.
4. Montrer que $\forall n \geq 2 : F_n \equiv 7[10]$, puis en déduire que 7 est le chiffre des unité de F_n pour $n \geq 2$.

Exercice 26:

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $5x - 3y = 2$.
2. a. Soit $A \in \mathbb{N}^*$ tel que : $A = \overline{55}_{(x)}$ et $A = \overline{37}_{(y)}$
   - Déterminer les valeurs possibles pour x et y.

   b. Déterminer x et y sachant qu'il existe un entier B tel que $B = \overline{121}_{(x)}$ et $B = \overline{59}_{(y)}$.

   c. Écrire A et B dans le système de numération decimal, puis dans le système de numération binaire.

Exercice 27: Bac 1999

1. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \wedge n = 1$

   a. Montrer que $2m^2 + n^2 \not\equiv 0[5]$.

   b. En déduire que $\left(2m^2 + n^2\right) \wedge 5 = 1$.
2. On considère l'équation $(E) : x \in \mathbb{R}, 2x^3 + x - 5 = 0$.

   a. Montrer que (E) admet une et une seule solution réelle α et que $1 < \alpha < 2$.

   b on suppose que $\alpha = \dfrac{m}{n}$ avec $m \wedge n = 1$.
   - vérifier que $\left(2m^2 + n^2\right) m = 5n^3$.
   - Montrer que $m = 5$.

   c. En déduire que le nombre α n'est pas rationnel

Exercice 28:

1. Soit n un entier naturel.
   a. Montrer que $2^{3n}-1$ est divisible par 7.
   b. En déduire que $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont divisibles par 7.
2. Discuter suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne du nombre 2^n par7.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose : $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   - Déterminer le reste de la division euclidienne de l'entier naturel A_p par 7.

Exercice 29:

Soit $\mathcal{A} = \{6k-1 \,/\, k \in \mathbb{N}^*,\ 6k-1 \in \mathbb{P}\}$.
Supposons que $\mathcal{A}$ est fini. Soient $N = sup(\mathcal{A})$ et $M = -1 + 6(N!)$.

1. Soit p un facteur premier de M
   a. Montrer que $p \notin \mathcal{A}$
   b. Montrer que p est de la forme $6k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.
   c. Déduire que $M \equiv 1\ [6]$
2. Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $6k-1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 30:

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation : (E) : $x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$

1. Soit (x, y) une solution de (E). On pose $d = x \wedge y$ et $x = ad$ et $y = bd$.
   a. Vérifier que : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.
   b. Conclure que $b = 1$.
   c. Montrer que $a \neq 1$ et $(a-1)|(a+1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).

Exercice 31:

Soient $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   a. $\overline{k}$ est inversible dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$
   b. $\overline{k}$ engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
   c. $k \wedge n = 1$
2. Soit G un groupe cyclique d'ordre n et d un diviseur de n.
   a. Montrer que G possède un unique sous groupe d'ordre d
   b. Montrer que $\quad n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \wedge n = 1$
   a. Montrer que $\quad \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

b. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, avec les p_i sont des nombres premiers distincts deux à deux. Calculer $\varphi(n)$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{Z} : \quad a \wedge n = 1 \Longrightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \; [n]$