منـارة الـفـردوس	فرض محروس رقم 01	2 بالـث علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الثانية : 2011/2010	ذ : عبدالله بن لـختير
		مدة الإنجاز : 04 ساعات

■ التمرين رقم 01: $(02pts\ de\ plus)$

1)- ليكن θ من $\mathbb{R}-\{\pi+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

⇦ أكتب على الشكل الجبري العدد العقدي : $z(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.

2)- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^5=(1-z)^5$ (إستعمل نتيجة السؤال1)-) .

■ التمرين رقم 02: $(03pts)$

1)- ليكن $d\in\mathbb{C}$ ، حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E): iz^2+(1-d)(1+i)z+d^2+1=0$.

2)- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي : d و $z_1=i+d$ و $z_2=-1-id$.

⇦ حدد و أنشىء المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللحق d بحيث : $OM_1=OM_2$.

3)- نفترض أن $|d|=1$ ، بين أن النقطة M_1 تنتمي إلى دائرة (C) ينبغي تحديدها .

4)- نفترض أن $\arg(d)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ، بين أن النقطة M_2 تنتمي إلى مستقيم (D) ينبغي تحديده .

■ التمرين رقم 03: $(03pts)$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E): z^3+\alpha z^2-\overline{\alpha}z-1=0$ ، حيث $\alpha\in\mathbb{C}^*$.

1)- بين أنه إذا كانت z_0 و z_1 و z_2 هي حلول المعادلة (E) فإن : $z_0z_1z_2=1$.

2)- بين إنه إذا كان z حلا للمعادلة (E) فإن $\dfrac{1}{z}$ أيضا حل لها ، ثم إستنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا معياره يساوي 1 .

3)- نفترض أن : $|\alpha|=1$ ، بين أن $-\alpha$ حل للمعادلة (E) ، ثم إستنتج الحلين الآخرين .

4)- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(F): 2z^3+(1+i\sqrt{3})z^2+(-1+i\sqrt{3})z-2=0$.

■ التمرين رقم 04: $(04pts)$

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=0$ و $b=2$ و $c=-j^2$ ، حيث : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1)- أنشىء المثلث ABC و حدد طبيعته .

⇦ خارج المثلث ABC ننشىء المثلثات المتساوية الأضلاع $A'BC$ و $AB'C$ و ABC'

و الأعداد العقدية a' و b' و c' هي على التوالي ألحاق النقط A' و B' و C' .

2)- بين أن : $a'=3+2j$ و $b'=j$ و $c'=-2j$.

3)- لتكن G نقطة تقاطع المستقيمين (AA') و (BB') ، بين أن : $aff(G)=\dfrac{2}{7}(3+2j)$.

4)- بين أن النقط C و G و C' مستقيمية و أن : $CG=\dfrac{1}{7}CC'$.

5)- بين أن النقط A و G و C و B' متداورة و أن : $AG+BG+CG=AA'$.

■ التمرين رقم 05: $(04pts)$

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي $a=2i$ و $b=-\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}-i)$ و ليكن F التحويل الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=(1+2i)z-(4+2i)$.

1)- أ- أحسب لحقي النقطتين A' و B' صورتي A و B على التوالي بالتحويل F .

ب- بين أن للتحويل F نقطة صامدة وحيدة Ω ينبغي تحديد لحقها ω .

ج- بين أن F مركب دوران r و تحاك h مركزاهما Ω محددا نسبة التحاكي h و زاوية الدوران r .

2)- لتكن $M(z)$ نقطة من (P) مختلفة عن $\Omega(\omega)$ و $M'(z')$ صورتها بالتحويل F .

أ- بين أن : $z'-z=-2i(\omega-z)$.

ب- حدد قيمة النسبة $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ و قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overline{M\Omega},\overline{MM'}})$.

ج- إنطلاقا من النقطة $M(z)$ و ضح طريقة لإنشاء النقطة $M'(z')$.

3)- لتكن C مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAB و R شعاعها و ليكن c لحق النقطة C .

أ- بين أن : $c-\overline{c}=2i$ و $c+\overline{c}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

ب- إستنتج كلا من c و R .

■ **التمرين رقم 06:** $(06pts)$

⇦ **الجزء الأول:** $(01pt)$

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E): 1+y' = 3e^{-y}$.

و نبحث عن جميع الدوال العددية h الموجبة و القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حلول المعادلة (E) .

لكل $x \in \mathbb{R}$ ، نضع : $g(x) = e^{h(x)} - 1$.

1)- بين أن g موجبة على $\mathbb{R}$ وأنها حل للمعادلة التفاضلية : $(F): y' = -y+2$.

2)- حل المعادلة (F) و أعط على التوالي تعبير كلا من $g(x)$ و $h(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

⇦ **الجزء الثاني:** $(02pts)$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \ln(3+e^{-x})$.

1)- تحقق من أن f حل للمعادلة (E) .

2)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

3)- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده ، ثم أحسب $f^{-1}(x)$ لكل $x \in J$.

4)- بين أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم أرسم كلا من (C_f) و $(C_{f^{-1}})$.

⇦ **الجزء الثالث:** $(03pts)$

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0 = 1$ و $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$.

1)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

2)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3)- لكل $n \in \mathbb{N}$ ، نضع : $S_n = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$.

أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |S_n - 2\alpha| \leq \frac{8}{3(n+1)}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

ب- إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

إنتهى الموضوع .