تصحيح الإمتحان الوطني الموحد للباكالوريا - الدورة العادية 2013 –

مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية أ و ب –

الأستاذ : محمد غريز ثانوية محمد الخامس و مجموعة مدارس النخيل بالقنيطرة http://www.riyadiyat.net

التمرين الأول

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{Z}$

أ – x * y = x + y – 2

= y + x – 2

= y * x

إذن القانون * تبادلي

ليكن (x, y, z) عنصرا من $\mathbb{Z}^3$

لدينا : $(x * y) * z = (x + y - 2) * z$

إذن : = x + y + z -4

لدينا : $x * (y * z) = x * (y + z - 2)$

إذن : = x + y + z -4

إذن $(x * y) * z = x * (y * z)$

إذن القانون * تجميعي

ب – e عنصر محايد للقانون * يعني $x * e = x \quad (\forall x \in \mathbb{Z})$ (لأن * تبادلي)

$\Leftrightarrow \quad e = 2$

إذن e = 2 هو العنصر المحايد للقانون *

ج – x′ مماثل x بالنسبة للقانون * يعني : $x * x' = 2$

$x * x' = 2 \Leftrightarrow x + x' - 2 = 2$

$\Leftrightarrow x' = 4 - x$

و $4 - x \in \mathbb{Z}$

لدينا * قانون تركيب داخلي في $\mathbb{Z}$

* تبادلي و تجميعي و e =2 هو العنصر المحايد للقانون *

و كل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا في $\mathbb{Z}$ هو $x' = 4 - x$

و بالتالي $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية

2 - أ - $\text{x T y} = \text{xy} - 2\text{x} - \text{y} + 6 \qquad \forall(\text{x},\text{y}) \in Z^2$

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$x \to f(x) = x + 2$$

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{Z}$

لدينا $f(x * y) = xy + 2$

و لدينا $f(x)\ T\ f(y) = (x+2)\ T\ (y+2)$

$$= (x+2)(y+2) - 2x - 4 - 2y - 4 + 6$$

$$= xy + 2$$

إذن $f(x * y) = f(x)\ T\ f(y)$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},T)$

لكل y من $\mathbb{Z}$ ، هل يوجد عنصر وحيد x من $\mathbb{Z}$ بحيث $f(x)=y$ ؟

$$f(x) = y \iff y = x + 2$$

$$\iff x = y - 2$$

إذن f تقابل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},T)$

و بالتالي f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},T)$

ب - $(x * y)\ T\ z = (x + y - 2) T\ z \qquad \forall(\text{x},\text{y},z) \in Z^3$

$$= xz + yz - 2x - 2y - 4z + 10$$

$$(xTz) * (yTz) = (xz - 2x - 2z + 6) * (yz - 2y - 2z + 6)$$

$$= xz + yz - 2x - 2y - 4z + 10$$

3 - $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية

بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},T)$، و × تجميعي في $\mathbb{Z}$ فإن T تجميعي في $\mathbb{Z}$

و لدينا T توزيعي بالنسبة للقانون * في $\mathbb{Z}$

إذن $(\mathbb{Z},*,T)$ حلقة

بما أن الضرب تبادلي في $\mathbb{Z}$ فإن T تبادلي في $\mathbb{Z}$

بما أن 1 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z},\times)$

فإن $f(1) = 3$ هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z},T)$

إذن $(\mathbb{Z},*,T)$ حلقة تبادلية و واحدية

4 – أ -
$$x \ T \ y = 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2$$
$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x(y-2) - 2(y-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ أو } y = 2$$

ب - 2 هو العنصر المحايد في $(\mathbb{Z},*)$، إذن 0 الحلقة $\mathbb{Z}$ ليس له قواسم

إذن $(\mathbb{Z},*,T)$ حلقة كاملة

ج – ليكن x′ مماثل x في $(\mathbb{Z},T)$

$$x \ T \ x' = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3$$
$$\Leftrightarrow xx' - 2x' = 2x + 3$$
$$\Leftrightarrow x'(x-2) = 2x - 3$$

إذا كان $x \neq 2$ فإن $x' = \frac{2x-3}{x-2}$

من أجل x=5 لدينا $x' = \frac{7}{3}$ و $\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$

إذن العنصر 5 لا يقبل مماثلا في $(\mathbb{Z},T)$

و بالتالي $(\mathbb{Z},*,T)$ ليس له بنية جسم

<u>التمرين الثاني</u>

I. $(E)\ :\quad 2z^2 - (3+i\sqrt{3})az + (1+i\sqrt{3})a^2 = 0$

1 - لدينا $\Delta = \left((3+i\sqrt{3})a\right)^2 - 8(1+i\sqrt{3})a^2$

$$\Delta = 2a^2 - 2i\sqrt{3}a^2$$
$$\Delta = (1+i\sqrt{3})^2 a^2$$

2 – لدينا $z_1 = \frac{(3+i\sqrt{3})a - a + i\sqrt{3}a}{4}$

$$= \frac{a+i\sqrt{3}a}{2}$$

إذن $z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

و $z_2 = \frac{3a+i\sqrt{3}a+a-i\sqrt{3}a}{4}$

$$z_2 = a$$

و بالتالي $S = \left\{a, \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a\right\} = \left\{a, , ae^{i\frac{\pi}{3}}\right\}$

II. نعتبر النقط A(a) و $B(ae^{i\frac{\pi}{3}})$ و M(z)

1 – لدينا $OA = |a|$ و $OB = \left|ae^{i\frac{\pi}{3}}\right| = |a|$

إذن OA=OB

ولدينا $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv \arg\left(\frac{b}{a}\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

بما أن OA=OB و $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv [2\pi]$ فإن المثلث OAB متساوي الأضلاع

2 – أ **–** r دوران مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$

لدينا $A_1 = r^{-1}(A)$ ، زاوية الدوران r^{-1} هي $-\frac{\pi}{3}$ و مركزه M

إذن $a_1 - z = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z)$

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + z$$

و منه $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

لدينا $B_1 = r(B)$

إذن $b_1 - z = (b-z)e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$b_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + z$$

و بما أن $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ فإن $b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

لحق المتجهة $\overrightarrow{OA_1}$ هو a_1

لحق المتجهة $\overrightarrow{B_1M}$ هو $z - b_1 = z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

إذن $z - b_1 = a_1$

إذن $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{B_1M}$

و منه الرباعي OA_1B_1M متوازي الأضلاع

3 – أ **–** لدينا $a_1 - z = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z)$

إذن $z-a_1=(z-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}$

و لدينا $b_1-z=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-z)$

إذن $z-b_1=(z-b)e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن $\frac{z-b_1}{z-a_1}=\frac{(z-b)e^{i\frac{\pi}{3}}}{(z-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

$=\frac{(z-b)}{(z-a)}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

لدينا $e^{i\frac{2\pi}{3}}=(-1)(-1)e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$=(-1)e^{-i\pi}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$=(-1)e^{-i\frac{\pi}{3}}$

و بما أن $b=a.e^{i\frac{\pi}{3}}$ فإن $\frac{a}{b}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

و بالتالي $\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{(z-b)}{(z-a)}\times\frac{a}{b}$

ب – النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية

يكافئ $\frac{z-b_1}{z-a_1}\in\mathbb{R}$

يكافئ $\frac{(z-b)}{(z-a)}\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

يكافئ $\frac{(z-b)}{(z-a)}:\frac{b-0}{a-0}\in\mathbb{R}$

و $\frac{b-0}{a-0}=e^{i\frac{\pi}{3}}\notin\mathbb{R}$

أي O وA_1 و B_1 غير مستقيمية

وبالتالي النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية

يكافئ النقط M و O و A و B متداورة

التمرين الثالث

$$(\text{R}):\quad 3^n-2^n\equiv 0[n]$$

1 - أ – ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n

لدينا p/n و $n/3^n-2^n$

إذن $p/3^n-2^n$

ومنه $3^n-2^n\equiv 0[p]$

لنبين أن $p \geq 5$

نفترض أن p<5

و بما أن p أولي فإن p=3 أو p=2

نفترض أن p=3

$$\begin{cases} 3/3^n \\ 3/3^n - 2^n \end{cases} \Rightarrow 3/3^n - (3^n - 2^n) \Rightarrow 3/2^n$$

غير ممكن

نفترض أن p=2

$$\begin{cases} 2/3^n \\ 2/3^n - 2^n \end{cases} \Rightarrow 2/(3^n - 2^n) + 2^n \Rightarrow 2/3^n$$

غير ممكن

و بالتالي $p \geq 5$

ب – لدينا p أولي و $p \geq 5$ إذن $2 \wedge p = 1$

إذن حسب مبرهنة Fermat $2^{p-1} \equiv 1[p]$

لدينا p أولي و $p \geq 5$ إذن $3 \wedge p = 1$

إذن حسب مبرهنة Fermat $3^{p-1} \equiv 1[p]$

ج – لدينا **p** أصغر قاسم أولي موجب للعدد n

إذن p-1 لا يقسم n

و جميع قواسم العدد p-1 لا تقسم n باستثناء العدد 1

إذن العددان n و p-1 أوليين فيما بينهما

إذن حسب مبرهنة Bezout يوجد (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث nu+(p-1)v = 1

نضع u=a و v=-b

و منه an-b(p-1) = 1

د – لدينا a=q(p-1)+r حيث $0 \leq r < p-1$

ولدينا an-b(p-1)=1

إذن n(q(p-1)+r)-b(p-1) = 1

nr+nq(p-1)-b(q-1) = 1

rn = 1+(p-1)(b-nq)

نضع k = b-nq

لنبين أن $b - nq \geq 0$

نفترض أن b-nq < 0

إذن $b-nq \leq -1$ إذن nq-b≥ 1

و لدينا $p \geq 5$ إذن $p-1 \geq 4$

إذن $(p-1)(nq-b) \geq 4$

إذن $(p-1)(b-nq) \leq -4$

إذن $1+(p-1)(b-nq) \leq -3$

إذن rn≤ -3

تناقض مع كون $r \geq 0$ و n > 1

و بالتالي يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث rn = 1+k(p-1)

2 - لدينا rn = 1+k(p-1) و $2^{p-1} \equiv 1[\mathrm{p}]$

إذن $\left(2^{(\mathrm{p}-1)}\right)^{k} \equiv 1[\mathrm{p}]$

$2^{rn-1} \equiv 1[\mathrm{p}]$

$2^{rn} \equiv 2[\mathrm{p}]$

لدينا $3^{p-1} \equiv 1[\mathrm{p}]$

إذن $(3^{p-1})^{k} \equiv 1[\mathrm{p}]$

$3^{rn-1} \equiv 1[\mathrm{p}]$

$3^{rn} \equiv 3[\mathrm{p}]$

لدينا $3^{rn}-2^{rn} \equiv 1[\mathrm{p}]$

إذن $(3^{n})^{r}-(2^{n})^{r} \equiv 1[\mathrm{p}]$

$(3^{n}-2^{n})[\,(3^{n})^{r-1}+\ (3^{n})^{r-2}2^{n}+\ldots\ldots+(2^{n})^{r-1}] \equiv 1[\mathrm{p}]$

وبما أن $3^{n}-2^{n} \equiv 0[\mathrm{p}]$

فإن $0 \equiv 1[\mathrm{p}]$ تناقض

وبالتالي لا يوجد عدد صحيح طبيعي *n* أكبر قطعا من 1 يحقق الخاصية $(\mathrm{R}):\quad 3^{n}-2^{n} \equiv 0[n]$

المسألة :

$$\begin{cases} h(x)=\frac{x-1}{xlnx};x>1 \\ h(1)=1 \end{cases}$$

الجزء الأول

1 - أ - $\lim_{\substack{\mathrm{x}\to 1\\ x>1}} \mathrm{h}(\mathrm{x})=\lim_{\substack{\mathrm{x}\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x}.\frac{x-1}{lnx}$

$= 1 \times 1 = 1 = h(1)$

إذن h متصلة على اليمين في 1

ب - لتكن f(x) = x-1-ln x

f قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

$(\forall x \in]1,+\infty[\,) \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$

إذن f تزايدية قطعا على $]1,+\infty[$

$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1)$

$\Rightarrow x - 1 - \ln x > 0$

$\Rightarrow \ln x < x - 1$

ملاحظة : يمكن استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية للدالة $t \to \ln t$ على المجال $[1,x]$

$(\forall x \in]1,+\infty[\,) \qquad h'(x) = \frac{x\ln x - (\ln x + 1)(x-1)}{x^2 ln^2 x} = \frac{\ln x - (x-1)}{x^2 ln^2 x}$

لدينا ln x <x-1 إذن h'(x) < 0 لكل x من المجال $]1,+\infty[$

إذن h تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$

2 - أ - $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} . \frac{1}{\ln x}$

= 1x0 = 0

جدول تغيرات

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
h'(x)	-
h(x)	1 $\searrow$ 0

ب - h متصلة و تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$

$h([1,+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} h(x), h(1)]$

$=]0,1]$

و منه $0 < h(x) \leq 1 \qquad (\forall x \geq 1)$

<u>الجزء الثاني</u>

1 - أ - لدينا $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{\ln' t}{\ln t} dt \qquad (x > 1)$

$= [\ln(\ln t)]_x^{x^2} \qquad (\ln(t) > 0)$

$= \ln (\frac{2\ln x}{\ln x})$

و بالتالي $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln(2)$

ب - $g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \quad (x > 1)$

إذن $= \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$

ج - نضع $y = \sqrt{t}$ إذن y² = t

2y dy = dt

إذن $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y-1}{y^2 \ln y^2} . 2y \, dy$

$g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y-1}{y \ln y} \, dy$

و بالتالي $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t \ln t} \, dt$

3 - أ - لدينا h تناقصية قطعا على $]1, +\infty[$

لكل $\sqrt{x} < t < x$ ، $h(x) < h(t) < h(\sqrt{x})$

$\int_{\sqrt{x}}^{x} h(x) \, dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} h(t) \, dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} h(\sqrt{x}) dt$

و منه $(x - \sqrt{x})\mathrm{h}(\mathrm{x}) \leq \mathrm{g}(\mathrm{x}) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})\mathrm{h}(\sqrt{x})$

ب - لدينا $\frac{(x-\sqrt{x})}{x-1}\mathrm{h}(\mathrm{x}) \leq \frac{g(x)-ln2}{x-1} \leq \frac{(x-\sqrt{x})}{x-1}\mathrm{h}(\sqrt{x})$

إذن $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{g(x)-ln2}{x-1} = \frac{1}{2}$

و بالتالي g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

ج - لدينا $g(x) > (x - \sqrt{x})h(x) + ln2$

$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})h(x) + ln2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-\sqrt{x})}{x \ln x}(x-1) + ln2$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)}{x} \frac{x}{\ln x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + ln2$

$= 1.(+\infty) + \ln 2$

$= +\infty$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

لدينا $\frac{ln2}{x} + \frac{(x-\sqrt{x})h(x)}{x} < \frac{g(x)}{x} < \frac{ln2}{x} + \frac{(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x})}{x} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) h(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x})}{x} h(\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) h(\sqrt{x}) = 0$$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

3 - أ - $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}ln\, t} dt$

لتكن $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}ln\, t}$،

f متصلة على $]1,+\infty[$ ، إذن f تقبل دالة أصلية φ بحيث φ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و $\varphi'(x) = f(x)$

لدينا $g(x) = [\varphi(t)]_x^{x^2} = \varphi(x^2) - \varphi(x)$

g قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ لأنها مجموع و مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $]1,+\infty[$

$$(\forall x \in]1,+\infty[) \quad g'(x) = 2x\varphi'(x^2) - \varphi'(x) = 2x.f(x^2) - f(x)$$

إذن $= \frac{2x}{xlnx^2} - \frac{1}{\sqrt{x}lnx}$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}ln\sqrt{x}}$$

وبالتالي $g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \quad (\forall x > 1)$

ب - لدينا $0 < h(x) \leq 1$ إذن $0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$

إذن $0 < \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$ ومنه $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

جدول تغيرات g

x	1 $\quad\quad$ $+\infty$
g'(x)	+
g(x)	ln2 ↗ $+\infty$

ج - إنشاء (C) : لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$ ، إذن (C) يقبل محور الأفاصيل كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$

(C) يقبل نصف مماس في النقطة $(1,\ln 2)$ على اليمين في 1، معامله الموجه $\frac{1}{2}$

__الجزء الثالث__

I - 1 - $k(x) = g(x) - x + 1$

لدينا g قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

إذن g قابلة للاشتقاق على $[1,+\infty[$ ، إذن g متصلة على $[1,+\infty[$

و الدالة $x\to -x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$، إذن الدالة k متصلة على $[1,+\infty[$

$$(\forall x\in[1,+\infty[)\qquad k'(x)=g'(x)-1$$

ولدينا $g'(x)\le\frac{1}{2}$ إذن $g'(x)-1<0$

إذن k تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$

لدينا $k(1) = g(1) = \ln 2$ و $\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)+1=-\infty$

إذن k تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $]-\infty,\ln 2]$ $k([1,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}k(x),k(1)\right]=]-\infty,\ln 2]$

2 - k تقابل من $[1,+\infty[$ نحو$]-\infty,\ln 2]$، و $0\in]-\infty,\ln 2]$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α من $]1,+\infty[$ بحيث $h(\alpha)=0$

إذن $g(\alpha)-\alpha+1=0$ ومنه $1+g(\alpha)=\alpha$

II - 1 - أ - من أجل n=0 لدينا $1\le U_0<\alpha$

نفترض أن $1\le U_n<\alpha$ و نبين أن $1\le U_{n+1}<\alpha$

لدينا $1\le U_n<\alpha$ إذن $g(1)\le g(U_n)<g(\alpha)$ (لأن g تزايدية)

إذن $1<1+\ln 2\le 1+g(U_n)<1+g(\alpha)$ ومنه $1\le U_{n+1}<\alpha$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $1\le U_n<\alpha\qquad(\forall n\in\mathbb{N})$

ب - لدينا $U_n < \alpha$ وبما أن k تناقصية فإن $k(U_n) > k(\alpha)$

إذن $g(U_n) - U_n + 1 > 0$

إذن $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه (U_n) تزايدية قطعا

ج - بما أن (U_n) تزايدية ومكبورة بالعدد α فإن (U_n) متقاربة

لتكن $\psi(x) = 1 + g(x)$. لدينا $U_{n+1} = \psi(U_n)$

ψ متصلة على $[1, \alpha]$ و $\psi([1, \alpha]) \subset [1, \alpha]$ و $U_0 \in [1, \alpha[$

و بما أن (U_n) متقاربة، فإن نهايتها l هي حل المعادلة $\psi(l) = l$

و منه $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

2 - أ - g متصلة على $[U_n, \alpha]$ و قابلة للاشتقاق على $]U_n, \alpha[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية $|g(\alpha) - g(U_n)| = |g'(c)||\alpha - U_n|$ $\quad (\exists c \in]U_n, \alpha[) :$

و بما أن $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ فإن $|g'(c)| < \frac{1}{2}$

و بالتالي $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب - من أجل n=0 لدينا $|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - \alpha|$

نفترض أن $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

و نبين أن $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

لدينا $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ (حسب افتراض الترجع)

إذن $\frac{1}{2}|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

و بما أن $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ فإن $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

وبالتالي حسب مبدأ الترجع $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج - لدينا $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $(0 < \frac{1}{2} < 1)$

إذن حسب مصاديق التقارب $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$