مباراة الدخول الى مسالك التكوين بمركز تكوين مفتشي التعليم
مسلك تكوين المفتشين التربويين للتعليم الثانوي التأهيلي من الدرجة الأولى
دورة 24 - 25 نونبر 2018

اختبار في المعارف المرتبطة بمواد التعليم الثانوي التأهيلي
التخصص: الرياضيات

مدة الإنجاز 3 ساعات | المعامل 3

taalimona.com

Exercice.

Parmi les nombres suivants :

1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, ... $\sqrt[n]{n}$... quel est le plus grand ?

Problème.

Une partie A gde $\mathbb{R}$ est dite dense si pour tout x et tout y dans $\mathbb{R}$ tels que $x<y$, il existe $a \in A$ tel que $x<a<y$. Pour tout réel x, on note $E(x)$ l'unique entier relatif vérifiant :
$E(x) \leq x < E(x)+1$. L'élément $E(x)$ est appelé la partie entière de x.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ tel que $f(x+T)=f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si f est périodique, on note par $G(f)$ l'ensemble : $G(f)=\{T \in \mathbb{R}: f(x+T)=f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Il est appelé l'ensemble des périodes de f.

<u>Partie I</u>. Le but de cette partie est de caractériser les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$.

1) Montrer que tout sous-groupe $H \neq \{0\}$ de $(\mathbb{Z},+)$ est de la forme $H=n\mathbb{Z}$ où n est un entier strictement positif. n est appelé le générateur de H.
2) Donner les générateurs des sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ suivants : $H_1=m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ et $H_2=m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}$ où m et n sont des entiers strictement positifs.

taalimona.com

3) Soit maintenant $G \neq \{0\}$ un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
Notons par $G^{*} = G \cap \mathbb{R}^{*+}$.

a) Montrer que G^{*} admet une borne inférieure notée a.

b) On suppose dans cette question que $a > 0$.

i) Montrer que $a \in G$. En déduire que $a\mathbb{Z} \subset G$.

ii) Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.

c) On suppose maintenant que $a = 0$.
Soient x et y deux réels tels que $x < y$.

i) Justifier l'existence d'un élément $g_1 \in G$ tel que $0 < g_1 < y - x$.

ii) En Considérant la partie entière de $\frac{x}{g_1}$, montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $x < g < y$.

d) En déduire qu'un sous-groupe G non réduit à $\{0\}$ de $(\mathbb{R},+)$ est soit dense soit monogène, c'est-à-dire de la forme $G = a\mathbb{Z}$ avec a un réel strictement positif.

4) Quelle est la nature des sous groupes suivants :
$G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$, $H = \ln(2)\,\mathbb{Z} + \ln(5).\mathbb{Z}$, $K = (\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \cap 5.\mathbb{Z}$.

5) Montrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors on a l'équivalence suivante:
$a.\mathbb{Z} + b.\mathbb{Z}$ est dense si et seulement si le rapport $\frac{a}{b}$ est irrationnel.

6) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout réel x, il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x.

7) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que α est irrationnel si et seulement s'il existe deux suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ dans $\mathbb{Z}$ telles que : $p_n\alpha - q_n \neq 0, \forall n$ et la suite $(p_n\alpha - q_n)_n$ converge vers 0. (on pourra considérer le sous-groupe $G = \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$).

Application :

Vérifier que la série $\sum \frac{1}{k!}$ est convergente.

On note $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ sa somme. En posant $p_n = n!$ et $q_n = n!.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{*}, 0 < p_n e - q_n < \frac{1}{n}$.
En déduire que e est irrationnel.

Partie II.

Dans cette partie toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$.

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :

f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x_0 la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.

2) Soit f une fonction périodique définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   i) Montrer que l'ensemble $G(f)$ des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

   ii) Montrer que si $G(f)$ est dense alors f est constante.

   iii) Montrer que si f est polynômiale alors f est constante.

   iv) On suppose que $G(f)$ n'est pas dense. Justifier que f admet une plus petite période strictement positive qu'on note T_f et que $G(f) = T_f.\mathbb{Z}$

3) Soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ Par $f_1(x) = \cos(x)$ et $f_2(x) = \cos(2\pi.x)$.

Vérifier que f_1 et f_2 admettent chacune une plus petite période strictement positive et montrer que $f_1 + f_2$ n'est pas périodique.

4) Soient maintenant f et g deux fonctions continues, périodiques admettant chacune une plus petite période strictement positive notée respectivement T_f et T_g.

Le but de cette question est de donner une condition nécessaire et suffisante sur T_f et T_g pour que la somme $f+g$ soit périodique.

a) On suppose que $G(f) \cap G(g) \neq \{0\}$

   i) Montrer que le rapport $\frac{T_f}{T_g}$ est rationnel.

   ii) Montrer que $f+g$ est périodique.

iii) Montrer que le sous-groupe $G(f)+G(g)$ est monogène.

b) On suppose maintenant que $\frac{T_f}{T_g}$ est rationnel. Montrer que $G(f)\cap G(g)\neq\{0\}$. En déduire que $f+g$ est périodique.

c) Réciproquement, supposons que $f+g$ est périodique et que $\frac{T_f}{T_g}$ est irrationnel.

Soit T une période strictement positive de $f+g$.

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x)=f(x+T)-f(x)$ et $k(x)=g(x+T)-g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

i) Montrer que h et k sont périodiques et que $T_f.\mathbb{Z}+T_g.\mathbb{Z}\subset G(h)\cap G(k)$.

ii) En déduire que h et k sont constantes.

iii) Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

En considérant la suite $(f(nT))_n$, montrer que h est nulle.

iv) Déduire des questions précédentes que $T\in T_f.\mathbb{Z}\cap T_g.\mathbb{Z}$ et aboutir à une contradiction.

d) Donner, alors, une caractérisation de la périodicité de f+g.

e) La fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x)=\sin(x)-E(x)+x$ est-elle périodique? Justifier votre réponse.

taalimona.com