I. تمهيد

1. تعريف

كل دالة معرفة على جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ تسمى متتالية عددية

$$u \quad I \longrightarrow \mathbb{R}$$

نرمز للمتتالية ب (U_n) ; U_n يسمى الحد العام

2. المتتاليات المكبورة-المصغورة-المحدودة

- (U_n) مكبورة ب M $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in I) \quad U_n \leq M$
- (U_n) مصغورة ب M $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in I) \quad U_n \geq m$
- (U_n) محدودة $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in I) \quad m \leq U_n \leq M$

3. رتابة متتالية

- (U_n) تزايدية $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in I) \quad U_{n+1} - U_n \geq 0$
- (U_n) تناقصية $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in I) \quad U_{n+1} - U_n \leq 0$
- (U_n) ثابتة $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in I) \quad U_{n+1} - U_n = 0$

4. استنتاج

- إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq U_0$
- إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq U_0$

5. ملاحظة

- لا يجب الخلط بين (U_n) و التي تمثل المتتالية و U_n الذي يمثل عدد حقيقي
- يمكن لمتتالية أن تكون معرفة بصيغة صريحة لحدها العام أو بصيغة ترجعية وذلك حينما يتم حساب حد ما بالرجوع إلى الحدود السابقة
- لكي نبين أن متتالية تزايدية أو تناقصية نحسب $U_{n+1} - U_n$ ثم نؤطر النتيجة المحصل عليها

أخيرا إذا كانت $U_{n+1} - U_n \geq 0$ فإن المتتالية تزايدية

إذا كانت $U_{n+1} - U_n \leq 0$ فإن المتتالية تناقصية

II. المتتاليات الحسابية

1. تعريف

	المتتالية الحسابية
تعريف	$V_{n+1} = V_n + r$
الحد العام	$V_n = V_0 + n \times r$ $V_n = V_p + (n-p) \times r$
مجموع حدود متتابعة	$V_p + V_{p+1} + \cdots + V_n = \dfrac{(n-p+1)}{2}\left(V_p + V_n\right)$

2. ملاحظة

لكي نبين أن المتتالية (V_n) حسابية نقوم بحساب $V_{n+1} - V_n$ حتى نجد $V_{n+1} - V_n = cste$
وتكون الثابتة هي الأساس

III. المتتاليات الهندسية

1. تعريف

	المتتالية الهندسية
تعريف	$V_{n+1} = qV_n$
الحد العام	$V_n = q^n V_0$ $V_n = q^{n-p} V_p$
مجموع حدود متتابعة	$V_p + V_{p+1} + \cdots + V_n = V_p \left(\dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}\right)$

2. ملاحظة

لكي نبين أن المتتالية (V_n) هندسية نحسب V_{n+1} بدلالة V_n حتى نجد $V_{n+1} = qV_n$

III. نهاية متتالية

1. تعريف

$(U_n)_n$ متتالية متقاربة $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ مع $l \in \mathbb{R}$

نقول إن $(U_n)_n$ متتالية متباعدة إذا كانت غير متقاربة

2. خاصية

- إذا كانت $(U_n)_n$ تزايدية و مكبورة فهي متقاربة
- إذا كانت $(U_n)_n$ تناقصية و مصغورة فهي متقاربة

3. نهاية متتالية عددية q^n

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \text{غير موجودة} & q \leq -1 \end{cases}$$

4. خاصية

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |U_n - l| = 0$$

5. مصاديق التقارب

$$\left.\begin{array}{r} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

$$\left.\begin{array}{r} |u_n - l| \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

$$\left.\begin{array}{r} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

IV.البرهان بالترجع

1. تمهيد

يعتبر البرهان بالترجع من المسائل الرئيسية التي ينبغي على التلميذ التمكن منها و في هذه الفقرة سنقدم طرق وأمثلة للبرهان بالترجع

بالنسبة للمتتاليات التي تحتوي صيغتها الترجعية على الحد العام U_n مرة واحدة فقط فيستحسن

استعمال طريقة التأطير مثلا $U_{n+1} = aU_n + b$ أو $U_{n+1} = \dfrac{a}{cU_n + d}$

بالنسبة للمتتاليات التي تحتوي صيغتها الترجعية على الحد العام U_n أكثر من مرة فيستحسن

استعمال طريقة الفرق مثلا $U_{n+1} = \dfrac{aU_n + b}{cU_n + d}$

2. مثال (التأطير)

نعتبر المتتالية العددية التالية

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{4}U_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

لنبين بالترجع أن $U_n \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

من أجل $n = 0$

$U_0 = 2 \geq 1$ عبارة صحيحة

فنفترض أن $U_n \geq 1$

و نبين أن $U_{n+1} \geq 1$

و لدينا حسب الإفتراض

$$U_n \geq 1$$

إذن

$$\frac{3}{4}U_n \geq \frac{3}{4}$$

و منه

$$\frac{3}{4}U_n + \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$U_{n+1} \geq 1$$

إذن حسب مبدأ البرهان بالترجع فإن $U_n \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3. مثال (الفرق)

نعتبر المتتالية العددية التالية

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 3} \end{cases}$$

لنبين بالترجع أن $U_n \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

من أجل $n = 0$

$U_0 = 2 \geq 1$ عبارة صحيحة

نفترض أن $U_n \geq 1$

و نبين أن $U_{n+1} \geq 1$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 3} - 1$$

$$= \frac{3U_n + 2 - 2U_n - 3}{2U_n + 3}$$

$$= \frac{U_n - 1}{2U_n + 3}$$

و لدينا حسب الإفتراض

$$U_n \geq 1$$

إذن

$$U_n - 1 \geq 0$$

ومنه

$$U_{n+1} \geq 1$$

إذن حسب مبدأ البرهان بالترجع فإن $U_n \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

V. كتابة U_n بدلالة n

في الإطار المرجعي للإمتحان الوطني سواء كانت المتتالية حسابية أو هندسية فإنها تكتب على أحد الأشكال التالية $V_n = aU_n + b$ أو $V_n = \frac{a}{cU_n + d}$ أو $V_n = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$

و سنقوم في الحالات الثلاث بكتابة U_n بدلالة n

الحالة 1 $V_n = aU_n + b$

كتابة U_n بدلالة n

لدينا

$$V_n = aU_n + b$$

$$V_n - b = aU_n$$

$$aU_n = V_n - b$$

$$U_n = \frac{V_n - b}{a}$$

أخيرا نعوض V_n بقيمتها

الحالة 2 $V_n = \frac{a}{cU_n + d}$

كتابة U_n بدلالة n

لدينا

$$V_n = \frac{a}{cU_n + d}$$

$$cU_n + d = \frac{a}{V_n}$$

$$cU_n = \frac{a}{V_n} - d$$

$$U_n = \frac{\frac{a}{V_n} - d}{c}$$

أخيرا نعوض V_n بقيمتها

الحالة 3 $V_n = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$

كتابة U_n بدلالة n

لدينا

$$V_n = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$$

$$V_n(cU_n + d) = aU_n + b$$

$$cU_nV_n + dV_n = aU_n + b$$

$$cU_nV_n - aU_n = b - dV_n$$

$$U_n(cV_n - a) = b - dV_n$$

$$U_n = \frac{b - dV_n}{cV_n - a}$$

أخيرا نعوض V_n بقيمتها

VI. متتالية من نوع $U_{n+1} = f(u_n)$

1. خاصية

- إذا كانت $u_{n+1} = f(u_n)$
- f متصلة على I
- $f(I) \subset I$
- $u_0 \in I$
- (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هو حل المعادلة $f(x) = x$

2. مثال

I. f الدالة العددية المعرفة بما يلي $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أدرس رتابة الدالــة f وضع جدول تغيراتها
3. بين أن $f(x) - x = \dfrac{x(1-x)}{x+1}$ لكل x من D_f
4. أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f مع المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $y = x$ على المجال $[0; +\infty[$

II. (u_n) المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1. بين أن $1 \leq u_n \leq 2$ لكل n من $\mathbb{N}$
2. بين أن (u_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربــة (يمكنك استعمال نتائج السؤال 4)
3. احسب نهاية المتتالية (u_n)

الحل

1. تحديد مجموعة التعريف

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$$

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

2. الرتابة

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(2x)' \times (x+1) - (2x) \times (x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2 - (2x)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ و $2 > 0$ ومنه f دالة تزايدية قطعا

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

3. حساب $f(x) - x$

$$f(x) - x = \frac{2x}{x+1} - x$$

$$f(x) - x = \frac{2x - x^2 - x}{x+1}$$

$$f(x) - x = \frac{x - x^2}{x+1}$$

$$f(x) - x = \frac{x(1-x)}{x+1}$$