059

1) أ) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $3x^2-7x-6=0$

ب) حل في $\mathbb{R}^{*+}$ المتراجحة: $3\ln^2 x-7\ln x-6>0$.

2) حلّ في $(\mathbb{R}^{+*})^2$ النّظمة: $\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x+\ln y=\ln 10 \end{cases}$ (بكالوريا وطنية 2003)

060

1) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $t^2-3t+2=0$. (بكالوريا وطنية 2011 د ع)

2) استنتج في $]0,+\infty[$: أ) حلّي المعادلة: $(\ln x)^2-3(\ln x)+2=0$.

ب) مجموعة حلول المتراجحة: $(\ln x)^2-3(\ln x)+2<0$.

061

(الأسئلة مستقلة فيما بينها).

1) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $E_1:\ (0,5)\ln(x-1)+\ln(\sqrt{x+2})=\ln 2$.

2) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $E_2:\ 2\ln x=\ln(2-x)$

3) بيّن أنّ: $\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})+\ln(7-4\sqrt{3})=0$

4) أكتب العدد $A=\ln(5\sqrt{15})+\ln(125)+\ln(45\sqrt{5})$ بدلالة $\ln 3$ و $\ln 5$.

5) تقدّر ساكنة مدينة هذه السنة ب 81000 نسمة، نسبة تزايدها سنوياً هي 2,6 % .
كم من السنوات يلزم هذه الساكنة حتى تصبح 162000 نسمة ؟

6) لتكن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $0,2$ و حدّها الأوّل $v_0=25$.
تحقّق أنّ المتتالية $(u_n)_n : u_n=\log_5(v_n)$ ، حسابية محدّداً أساسها و حدّها الأوّل

7) لتكن الدالة: $h(x)=\dfrac{3+\ln x}{\ln x-1}$ ، حدّد D_h و أحسب $h'(x)$.

8) أحسب $C=\log(250000)+\log(\sqrt{250})-\log(125)$. لوغرتم عشري

062

(بكالوريا وطنية 2007)

حدّد (u,v) بحيث $\begin{cases} \dfrac{u}{v}=4 \\ u+v=5 \end{cases}$ واستنتج (x,y) الذي يحقّق $\begin{cases} \dfrac{\ln x}{\ln y}=4 \\ \ln(xy)=5 \end{cases}$.

063

1) أنشر $(X-3)(X-2)$ (بكالوريا وطنية 2006 د – س)

2) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(\ln x)^2-5(\ln x)+6=0$.

3) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $(\ln x)^2-5(\ln x)+6<0$.

064

1) حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\ln(3-x)-\ln(x-2)=0$

2) حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\ln(1-\dfrac{x}{2})<0$. (مكناس 2000 / 1999)

065

أحسب النهايات التالية:

$$A=\lim_{(-1)^+}\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\ ;\ B=\lim_{(3)^-}\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\ ;\ C=\lim_{+\infty}\frac{\ln x-3}{1+3\ln x}$$

$$D=\lim_{+\infty}\frac{\ln x-3x}{\ln x+x}\ ;\ E=\lim_{0^+}\sqrt{x}\ln x\ ;\ F=\lim_{1^+}\frac{\ln x}{x^3-1}\ ;\ G=\lim_{+\infty}x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

066

نعتبر $f(x)=x-\dfrac{1}{\ln x}$ المعرّفة على $D=]0;1[\cup]1;+\infty[$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتائج.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)-x$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) بيّن أنّ: $f'(x)=1+\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ ثمّ أدرس رتابة f على $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

4) بيّن أنّه يوجد عدد وحيد α من $]\dfrac{3}{2};2[$ بحيث $f(\alpha)=0$ (بكالوريا 2008 د – ع)

067

نعتبر الدالة العددية: $g(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

1) بيّن أنّ مجموعة تعريف g هي: $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$. (بكالوريا 2009 د ع)

2) أ) أدرس إشارة $x\ln x$ على D .

ب) أحسب نهايات g عند محدّات D_g ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنتائج.

3) بيّن أنّ: $g'(x)=-\dfrac{(1+\ln x)}{(x\ln x)^2}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيرات.

4) أنشئ C_g نأخذ: $e\approx 2,7$ و $e^{-1}\approx 0,4$.

068

f معرّفة على $\mathbb{R}^+$ ب: $\begin{cases} f(x)=2x^2(2\ln x+1)\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$. (مكناس 2000 / 1999)

2) أ) بيّن أنّ f متّصلة على اليمين في 0 .

ب) بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلاً مبيانياً للنّتيجة.

3) بيّن أنّ: $f'(x)=8x(\ln x+1)$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيّرات.

4) أدرس الفرع اللاّنهائي ل C_f بجوار $+\infty$.

5) أنشئ C_f الوحدة $2cm$. نأخذ: $e\approx 2,7$.

069

I) لتكن $g(x)=x^2-1+\ln x$ حيث $x\in]0,+\infty[$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$. (بكالوريا وطنية 2003 د – س)

2) أ) أحسب $g'(x)$ ثمّ ضع جدول تغيّراتها.

ب) أحسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II) لتكن الدالة المعرّفة على $]0,+\infty[$ ب: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ب) حدّد $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ ثمّ $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-(x-1))$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ج) أدرس الوضع النّسبي ل C_f و المستقيم $(D): y=x-1$.

2) بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ و أدرس إشارتها ثمّ ضع جدول التغيّرات.

3) بيّن أنّ: $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}(3-2\ln x)$ ثمّ استنتج نقطة الانعطاف ل C_f .

4) أنشئ المستقيم (D) و المنحنى C_f .

070

(بكالوريا اقتصاد 2007 د – ع)

I) 1) نعتبر الدالة: $h(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln x$ أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)$.

2) أ) أحسب $h'(x)$ و ضع جدول التغيرات،

ب) أحسب $h(1)$ و استنتج إشارة $h(x)$ على $]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ المعرّفة على $]0,+\infty[$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-(x-1))$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.

2) بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$ و أدرس إشارتها و ضع جدول التغيرات.

3) أدرس الوضع النسبي ل C_f و المستقيم $(D): y=x-1$ ثمّ أنشئ C_f .

الدوال اللوغارتمية (2 / 2)

071

الجزء الأول: نعتبر الدالة المعرّفة على $]0,+\infty[$ ب: $g(x)=-1+x+2x\ln x$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (بكالوريا وطنية 2010 د – ع)

2) أ) بيّن أنّ لكلّ x من $]0,+\infty[$ لدينا: $g'(x)=3+2\ln x$.

ب) أدرس إشارة $g'(x)$ ثمّ أعط جدول تغيرات g على $]0,+\infty[$.

ج) أحسب $g(1)$ و استنتج من السؤال 2) ب) أنّ لكلّ x من $]0,1]$: $g(x)\le 0$ و أنّ لكلّ x من $[1,+\infty[$: $g(x)\ge 0$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة $f(x)=1-x+x^2\ln x$ المعرّفة على $]0,+\infty[$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to0+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

2) أ) تحقّق أنّ $f'(x)=g(x)$ لكلّ x من $]0,+\infty[$

ب) باستعمال (2) ج) من الجزء الأول) ضع جدول التغيرات.

072

نعتبر الدالة: $f(x)=2x\ln x-4(\ln x)^2-2x+5$ حيث $x>0$.

1) أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(\sqrt{e})$ و $f(e^2)$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to0+} f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة. (فرض منزلي 2010 / 2011)

3) تحقّق أنّ: $f(x)=x\ln x\left(2-\dfrac{4\ln x}{x}-\dfrac{2}{\ln x}\right)+5$ ثمّ أدرس الفروع اللانهائية

4) بيّن أنّ $f'(x)=\dfrac{(2x-8)\ln x}{x}$ و ضع جدول التغيّرات وأنشئ C_f : $f(4)\approx 0,5$

073

لتكن الدالة f بحيث: $f(x)=-x^2+\dfrac{x-2}{2x}+\ln x$

1) أ) حدّد D_f وأحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to0+} f(x)$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

2) أ) أحسب $f'(x)$ ثمّ بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{(1-x)(2x^2+2x+1)}{x^2}$.

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول التغيّرات. (بكالوريا وطنية 2004 د – س)

3) أنشئ المنحنى C_f .

4) أ) بيّن أنّ g قصور f على $]0,1]$ تقبل دالة عكسية على مجال J يتمّ تعيينه.

ب) أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة g^{-1} .

074

نعتبر الدالة: $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$

1) بيّن أنّ: $D_f=\mathbb{R}$ ثم أحسب: $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّ المستقيم $x=1$ محور تماثل C_f

3) أ) تحقّق أنّ: $f(x)=2\ln(x)+\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$ لكلّ x من $[1,+\infty[$.

ب) استنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ ثمّ أوّل النّتيجة هندسياً.

4) بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$ و أعط جدول التغيّرات.

5) بيّن أنّ: $f''(x)=\dfrac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$ و أدرس تقعّر C_f ثمّ أنشئ C_f .

6) ليكن h قصور f على $[1,+\infty[$ ، بيّن أنّ h تقبل دالة عكسية و حدّد $h^{-1}(x)$.

075

I) لتكن $g(x)=-x+1+x\ln x$ حيث $x\in I=]0,+\infty[$.

1) أحسب $g'(x)$ ثمّ ضع جدول تغيّراتها. (بكالوريا وطنية 2007 د – س)

2) استنتج أنّ $g(x)\ge 0$: $\forall x>0$.

II) لتكن الدالة المعرّفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=-3x^2+4x+2x^2\ln x\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

2) بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) بيّن أنّ $f'(x)=4g(x)$ و أعط جدول تغيّرات الدالة f .

4) بيّن أنّ $I(1,1)$ نقطة انعطاف وحدّد معادلة المماس في I ثمّ أنشئ C_f .

076

نعتبر الدالتين: $f(x)=-x+\dfrac{\ln x}{x}$ و $g(x)=-x^2+1-\ln x$.

I) 1) بيّن أنّ: $g'(x)=-(2x+\dfrac{1}{x})$ ثمّ حدّد إشارة $g'(x)$ على $]0,+\infty[$.

2) أ) أحسب $g(1)$ و ضع جدول تغيرات g (دون حساب النهايات).

ب) استنتج أنّ: $\forall x\in]0,1]: g(x)\ge 0$ و أنّ $\forall x\in]1,+\infty[: g(x)<0$

3) بيّن أنّ: $\forall x>0: f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$. (بكالوريا وطنية 2011 د ع)

II) 1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to0+} f(x)$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ بيّن أنّ C_f يقبل مقارباً مائلاً (Δ) معادلته $y=-x$

2) أحسب $f(1)$ و ضع جدول التغيرات (يمكن استعمال نتيجة السؤال 3) من الجزء I)

3) أنشئ C_f : نقبل أنّ C_f له نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{3}{2}}\approx 4,5$ و $f(e^{\frac{3}{2}})\approx -4$

077

$\begin{cases} f(x)=-2x+\dfrac{x}{\ln x}+x\ln x \\ f(0)=0 \end{cases}$ معرّفة على $[0,1[\cup]1,+\infty[$

1) بيّن أنّ f متّصلة على اليمين في 0 .

2) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) أحسب $\lim\limits_{x\to1-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1+} f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

4) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و حدّد الفرع اللاّنهائي ل C_f جوار $+\infty$.

5) بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{[(\ln x)^2+1][\ln x-1]}{(\ln x)^2}$ وأدرس إشارتها وضع جدول التغيّرات

6) أنشئ C_f . نقبل أنّ ل C_f نقطة انعطاف أفصولها بين 0 و 0,5 .

078

I) لتكن $g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$ حيث $x\in]0,+\infty[$.

1) بيّن أنّ $g'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$ ثمّ استنتج منحى تغيّرات g على $]0,+\infty[$.

2) بيّن أنّ $\forall x\in]0,1]: g(x)\le 0$ و أنّ $\forall x\in[1,+\infty[: g(x)\ge 0$ $g(1)=0$

II) نعتبر الدالة $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ حيث $x\in]0,+\infty[$.

1) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (ضع $t=\sqrt{x}$) ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) تحقّق أنّ $f(1/x)=f(x)$ لكلّ x من $]0,+\infty[$.

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to0+} f(x)$ (يمكن وضع $t=1/x$) ثمّ أوّل النّتيجة مبيانياً.

د) بيّن أنّ C_f يقبل فرعا شلجمياً اتجاهه المقارب هو المستقيم $y=x$.

2) بيّن أنّ $\forall x>0: f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ و ضع جدول تغيّرات f ثمّ أنشئ C_f .