Lycée Omar Ibn Elkhatab
-Méknes-

Niveau : 2Bac pc biof

Devoir surveillé 02
19- 12-2017

Exercice:

On considère la suite (u_n) **définie par :** $u_0 = 2$ **et** $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \succ 1$.

b- Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ **puis déduire la monotonie de .** (u_n).

c- En déduire que (u_n) **est convergente.**

2) soit (v_n) **la suite définie par :** $v_n = u_n - 1$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$.

a- Montrer que (v_n) **est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.**

b- Montrer que : $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ **et calculer** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Problème : On considère la fonction f **définie sur** $D = [0;2[\cup]2;+\infty[$ **par :** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-2)^2}$

1) a- Vérifier que : $\forall x \in D\ \ f(x) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(x - 4 + \frac{4}{x}\right)}$ **et calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **puis étudier les branche infinies de** (C_f).

2) Etudier la dérivabilité de f **a droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.**

3) a- Montrer que : $\forall x \in]0.2[\cup]2.+\infty[\qquad f'(x) = \frac{(2-x)(3x+2)}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$

b- Etudier le signe de $f'(x)$ **et dresser le tableau de variation de** f **.**

4) Soit g **la restriction de** f **à l'intervalle** $I = [0,2[$.

a- Montrer que g **admet une réciproque** g^{-1} **définie sur un intervalle** J **que l'on déterminera.**

b- Montrer que g^{-1} **est dérivable en 1 et calculer** $(g^{-1})'(1)$.

5) Construire (C_f) **et** $(C_{g^{-1}})$ **dans le même repère orthonormal.**

6) Soit (u_n) **la suite réelle définie par** $u_0 = \frac{1}{4}$ **et** $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n)$ **.**

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{4}$

b- Montrer que (u_n) **est décroissante**

c-En déduire que (u_n) **est convergente puis calculer** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

7) On considère