ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	فرض محروس رقم 03 الدورة الأولى : 2016/2015	2 بكالوريا علوم رياضية ذ : عبدالله بن الختير مدة الإنجاز : أربع ساعات

❖ تمرين رقم 01: (09 نقط)

I- لتكن f الدالة المعرفة على $]1,+\infty[$ بما يلي : | 4,25pts

$$(\forall x\in]1,+\infty[);\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{\ln x}}.$$

1)- أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ، ثم اعط تأويلها الهندسي . | 0,25

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي . | 0,5

2)- أ- بين أن f قابلة للإشتقاق على $]1,+\infty[$ وأن : $(\forall x\in]1,+\infty[);\ f'(x)=\frac{2\ln x-1}{2\left(\sqrt{\ln x}\right)^3}$. | 0,5

ب- ضع جدول تغيرات f معللا جوابك . | 0,5

3)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. | 0,75

4)- ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث : $n\geq 3$.

أ- بين أن المعادلة : $f(x)=n$ تقبل بالضبط حلين إثنين u_n و v_n بحيث : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$. | 0,75

ب- بين أن : $(\forall n\geq 3);v_n>n$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 3}$. | 0,5

ج- برهن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 3}$ متقاربة . | 0,5

د- بين أن : $(\forall n\geq 3);\frac{1}{n^2}<\ln(u_n)<\frac{e}{n^2}$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 3}$. | 0,5

II- لتكن F دالة أصلية للدالة f على $]1,+\infty[$ و G هي الدالة المعرفة على $[1,+\infty[$ بما يلي : $G(1)=0$ و $(\forall x\in]1,+\infty[);G(x)=F(x^2)-F(x)$. | 4,75pts

1)- أ- بين أن : $(\forall x\in]1,+\infty[);G(x)>0$. | 0,25

ب- بين أن G قابلة للإشتقاق على $]1,+\infty[$ و أن : | 0,75

$$(\forall x\in]1,+\infty[);G'(x)=\left(\sqrt{2}x^2-1\right)f(x).$$

ج- إستنتج منحى تغيرات G على $]1,+\infty[$. | 0,5

2)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in \left]1,\sqrt[4]{e}\right[\right);\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{2\ln x}}<G(x)<\frac{x^2(x-1)}{\sqrt{\ln x}}$. | 0,75

ب- بين أن G متصلة على اليمين في $x_0=1$. | 0,5

ج- أدرس قابلية إشتقاق G على اليمين في $x_0=1$ و أول النتيجة المحصل عليها . | 0,75

3)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in \left]\sqrt[4]{e},+\infty\right[\right);G(x)>\frac{x^2(x-1)}{\sqrt{\ln x}}$. | 0,5

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to +\infty} G(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{G(x)}{x}$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي . | 0,75

❖ **تمرين رقم 02:** (11 نقطة)

3pts I- لتكن u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R});u(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

0,5 **1**)- بين أن الدالة u فردية ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}u(x)$.

0,5 **2**)- أ- بين أن u تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

0,5 ب- حدد التقابل العكسي u^{-1} .

0,75 **3**)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});u''(x)=\frac{8e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^3}$ ، ثم أدرس تقعر المنحنى (C_u) .

0,75 **4**)- أرسم المنحنيين (C_u) و $(C_{u^{-1}})$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5pts II- لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{2x}{x+u(x)};x\neq0 \text{ و } f(0)=1.$$

0,5 **1**)- تحقق من أن $D_f=\mathbb{R}$ و بين أن f زوجية .

0,75 **2**)- بين أن f متصلة على $\mathbb{R}$.

0,25 **3**)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});u'(x)=1-u^2(x)$.

0,5 ب- إستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);x-\frac{x^3}{3}\leq u(x)\leq x$.

0,25 **4**)- أ- تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x-u(x)}{2x^2}\times f(x)$.

0,5 ب- أدرس قابلية إشتقاق f في الصفر محددا $f'(0)$.

5)- أ- بين أن f قابلة للإشتقاق على كل مجال من $\mathbb{R}^*$ و أن :

0,75 $$(\forall x\in\mathbb{R}^*);\ f'(x)=2\times\frac{u(x)-xu'(x)}{\left(x+u(x)\right)^2}.$$

0,75 ب- بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ و أن : $f(\mathbb{R}^+)=[1,2[$.

0,75 **6**)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3pts III- لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall t\in\mathbb{R}^+);\varphi(t)=t-u(t).$$

0,5 **1**)- أ- بين أن : $(\forall t\in\mathbb{R}^+);0\leq\varphi'(t)\leq t^2$.

0,5 ب- إستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);0\leq\varphi(x)\leq\frac{x^3}{3}$.

2)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=\sqrt[3]{\varphi(u_n)} \text{ و } u_0\in\mathbb{R}^{*+}.$$

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});0\le u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt[3]{3}}u_n$.	0,5
ب- إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .	0,5
3)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n=\sum_{k=1}^{n}u\left(\frac{1}{n+k}\right)$.	
أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\frac{-1}{3n^2}\le S_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\le 0$.	0,75
ب- إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها (نقبل أن : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln 2$) .	0,25

➢ **تمارين إضافية :**

❖ **تمرين رقم 01:**

✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});\prod_{k=2}^{n}\ln k<\frac{\sqrt{n!}}{n}$.

❖ **تمرين رقم 02:**

✓ حدد جميع الدوال : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{*+}$ و التي تحقق ما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)\times f(x+2)=\left[f(x+1)\right]^2$.

❖ **تمرين رقم 03:**

✓ أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(a^{kx}-2a^{2kx}\right)$ ، حيث $a\in\mathbb{R}^{*+}$ و $x\in\mathbb{R}$.

❖ **تمرين رقم 04:**

✓ بين أن : $\left(\forall(a,b,x,y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^4\right);x\ln\left(\frac{x}{a}\right)+y\ln\left(\frac{y}{b}\right)\ge(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$.

abouzakariyamaths@gmail.com

Tel : 0672109154