| | | | |
|---|---|---|---|
| أكاديمية الرباط زمور زعير<br>مقاطعة حسان | امتحان تجريبي موحد<br>دورة ماي 2010 | الصفحة<br>مدة الإنجاز | 1/3<br>4 ساعات |
| المادة: الرياضيات<br>الشعبة : العلوم الرياضية (أ) و (ب) | يسمح باستعمال الألة الحاسبة غير القابلة للبرمجة | المعامل | 9 |

## التمرين الاول ( 3,5 ن)

نضع $A=\left\{M_a=\begin{pmatrix} e^a & ae^a \\ 0 & e^a\end{pmatrix} / a\in IR\right\}$ و $B=\left\{N_b=\begin{pmatrix} 1 & \ln b \\ 0 & 1\end{pmatrix} / b\in IR_+^*\right\}$ و $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1) تحقق أن $I\in A$ و $I\in B$ 0,25 0,25

2) أ) بين أن $(\forall (M_a,M_b)\in A^2):\ M_a\times M_b=M_{a+b}$ 0,5

ب) بين أن $(A,\times)$ زمرة تبادلية .

ج) نعتبر المجموعة $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix} e^a & ae^a \\ 0 & e^a\end{pmatrix} / a\in IZ\right\}$ 0,5

بين أن $(E,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(A,\times)$ 0,5

د) لكل $M_a\in A$ نضع $(M_a)^0=I$ و $(M_a)^{-n}=\left((M_a)^{-1}\right)^n$ و $(\forall n\in IN):\ (M_a)^{n+1}=(M_a)^n\times M_a$ 0,25

حدد $(\forall k\in IZ):\ (M_a)^k$ . 1

3) أ) بين أن $B$ جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$ 0,25

ب) بين أن المجموعتين $(B,\times)$ و $(IR_+^*,\times)$ متشاكلتان تقابليا ثم استنتج بنية $(B,\times)$

4) هل المجموعة $A\cup B$ مستقرة بالنسبة للضرب في $M_2(IR)$ علل جوابك.

## التمرين الثاني(2,5 ن)

0,25

ليكن $p$ عددا اوليا بحيث $p\geq 5$ 0,5

نعتبر في المجموعة $IN^*\times IN^*$ المعادلة $(E):\quad px+y^{p-1}=2011$ 0,5

1) تحقق أن 2011 عدد اولي. 0,5

2) نفترض أن $(x,y)$ حل للمعادلة $(E)$ 0,75

أ) بين أن $p$ لايقسم العدد $y$ .

ب) استنتج أن $p$ يقسم العدد 2010 ثم حدد قيم $p$ .

ج) حدد الزوج $(x,y)$ في حالة $p=67$ (نأخذ $\sqrt[66]{2011}\approx 1{,}12$ )

3) حل المعادلة في حالة $p=5$ 0,5

## التمرين الثالث(2,5 ن)

0,5

نعتبر في المجموعة $C$ المعادلة $(E):z^2-az+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$ حيث $a$ بارمتر عقدي . 0,5

ليكن $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $(E)$

1) بدون إعطاء حلول المعادلة $(E)$ بين أن $|z_1|\times|z_2|=1$ و $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

2) أ) نضع $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$ بين أن $a=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$ . 0,5

ب)استنتج أنه ادا كان $z_1=i$ فان $1+ia-a^2-ia^3+a^4+ia^5=0$ . 0,5

3) نضع $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ونعتبر النقط $A(a)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

أ)حدد طبيعة المثلث $OM_1M_2$ وكذا طبيعة الرباعي $OM_1AM_2$ .
ب) استنتج معيار وعمدة العدد العقدي $a$

## المسألة (11,5 ن)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$ وليكن $(C)$ منحناها في معلم متعامد وممنظم

### الجزء الاول

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ واستنتج الفروع الانهائية .

ب) أدرس تغيرات الدالة $f$ وضع جدول تغيراتها.
ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين 0 و $\alpha$ بحيث $\alpha>1$ واستنتج اشارة $f(x)$ .
د) أنشئ المنحنى $(C)$
2) ليكن $n\in IN$ بحيث $n\geq 4$
أ) بين أن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا $u_n$ في المجال $]0,1[$ .
ب) بين أن المتتالية $(\mathbf{u_n})_{n\geq 4}$ تناقصية واستنتج انها متقاربة .حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

### الجزء الثاني

نعتبر الدالة $\varphi$ المعرفة بما يلي
$$\begin{cases}\varphi(t)=\dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & ,t\neq 0\\ \varphi(0)=0\end{cases}$$

1) أ) تحقق أن الدالة $\varphi$ فردية .
ب) أدرس اتصال $\varphi$ وقابليتها للاشتقاق في الصفر.
ج) بين أن $(\forall t\in IR^*): \varphi'(t)=\dfrac{1}{t^2}f(t^2)$ .
د) استنتج جدول تغيرات الدالة $\varphi$ .

2) نعتبر الدالة $g$ المعرفة بما يلي $g(x)=\displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt$
أ) بين أن $g$ دالة زوجية.
ب) بين ان $g$ قابلة للاشتقاق على $IR$ وأحسب $g'(x)$ .
ج) ضع جدول تغيرات الدالة $g$ .

3)أ) أحسب $I=\displaystyle\int_1^x \frac{2}{t}\ln(t)dt$ .
ب) استنتج أن $(\forall x\geq 1): g(x)-g(1)=(\ln(x))^2+\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ .
ج) بين أن $(\forall x\geq 0): \ln(1+x)\leq x$
د) استنتج أن $(\forall x\geq 1): 0\leq \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\leq \frac{1}{2}$ .

0,75
0,5
0,5
0,5
0,5
0,75
0,25
0,5
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,25
0,5

0,25

0,25

ه) أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ استنتج طبيعة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$

0,25

## الجزء الثالث

0,25

نعتبر المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)$

0,25

1) بين أن $\left(\forall k \in IN^*\right): \ln(1+k) - \ln(k) < \frac{1}{k}$

0,25

2) استنتج أن $\left(\forall k \in IN^*\right): 2\ln(k+2) - 3\ln(k+1) + \ln(k) < f\left(\frac{1}{k}\right)$ ثم أن

$\left(\forall k \in IN^*\right): 2\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) < f\left(\frac{1}{k}\right)$.

3) استنتج أن $\left(\forall n \in IN^*\right): \ln\left(\frac{(n+1)^2}{4(n+1)}\right) < S_n$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

## الجزء الرابع

**في هدا الجزء نفترض أن $x \in ]0,1[$**

1) بين أن $\left(\forall n \in IN^*\right): \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$

2) بين أن $(\forall n \in IN^*) : \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.

3) استنتج أن $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{2k-1}{k} x^k + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.

4) أ) بين أن $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq x^{n+2}$.

ب) استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$.

ج) بين أن $(\forall x \in ]0,1[) \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2k-1}{k} x^k \right)$