الامتحان الوطني 2016
شعبة علوم رياضية

للتواصل
fz0.msn@gmail.com

آخر تعديـل
25 أبريل 2017

* *
*

البنيات الجبرية

1. لدينا E جزء غير فارغ من $M_3(\mathbb{R})$ و $M(0,0) \in E$،
لتكن $M(x,y)$ و $M(x',y')$ مصفوفتين من E، لدينا

$$\begin{aligned}
M(x,y)+M(-x',-y') &= \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x'+y') & 0 & 2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ -y' & 0 & -(x'-y') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x-x')+(y-y') & 0 & -2(y-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y-y' & 0 & (x-x')-(y-y') \end{pmatrix} \\
&= M(x-x',y-y') \in E
\end{aligned}$$

لأن مماثل $M(x',y')$ بالنسبة للقانون $+$ هو $M(-x',-y')$
اذن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$.

2. ليكن $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. لدينا

$$\begin{aligned}
M(x,y)\times M(x',y') &= \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (xx'-yy')+(xy'+yx') & 0 & -2(xy'+yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy'-yx' & 0 & (xx'-yy')-(xy'+yx') \end{pmatrix} \\
&= M(xx'-yy',xy'+yx')
\end{aligned}$$

3. **ا.** ليكن $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ بحيث العددان $x+iy$ و $x'+iy'$ من $\mathbb{C}^*$. لدينا

$$\begin{aligned}\varphi((x+iy)\times(x'+iy')) &= \varphi((xx'-yy')+i(xy'-yx'))\\ &= M(xx'-yy', xy'+yx')\\ &= M(x,y)\times M(x',y')\\ &= \varphi(x+iy)\times\varphi(x'+iy')\end{aligned}$$

اذن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

ب. لنبين أولا أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.

لتكن $M(x,y)\in E^*$، اذن $(x,y)\neq(0,0)$ وبالتالي $x+iy\in\mathbb{C}^*$. نستنتج أن المعادلة

$$\varphi(z)=M(x,y)$$

تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{C}^*$ هو $x+iy$، وبالتالي φ شمولي من $\mathbb{C}^*$ نحو E^*.

خلاصة: صورة الزمرة التبادلية $(\mathbb{C}^*,\times)$ بالتشاكل φ هي الزمرة التبادلية $(E^*,\times)$، عنصرها المحايد هو

$$\varphi(1)=M(1,0)$$

4. حسب ما سبق:

- $(E,+)$ زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو $M(0,0)$
- $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية
- ونعلم أن القانون $\times$ توزيعي على $+$ في $M_3(\mathbb{R})$

اذن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

5. لدينا

$$\begin{aligned}A\times M(x,y) &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= M(0,0)\end{aligned}$$

نفترض أنه يوجد $M(x,y)$ من E يقبل مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$، اذن:

$$\begin{aligned}&A\times M(x,y)=M(0,0)\\ &\Rightarrow A\times M(x,y)\times M(x,y)^{-1}=M(0,0)\times M(x,y)^{-1}\\ &\Rightarrow A\times I=M(0,0)\\ &\Rightarrow A=M(0,0)\end{aligned}$$

وهذا تناقض. اذن كل عنصر من E لا يقبل مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$.

الحسابيات

الجزء الأول

1. نعلم أن $a^3+b^3\equiv 0[173]$، اذن $a^3\equiv -b^3[173]$ ومنه $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$ (لاحظ أن العدد 57 فردي).

2. بما أن a و b يلعبان نفس الدور، يكفي أن نبين أحد الاستلزامين.
اذا كان 173 يقسم a فان $a\equiv 0[173]$ وبالتالي فان $a^{171}\equiv 0[173]$ وباستعمال السؤال السابق فان $b^{171}\equiv 0[173]$ وبما أن 173 اولي نستنتج أنه يقسم b، وهو المطلوب

3. بما أن 173 يقسم a فهو حسب ما سبق يقسم b وبالتالي فـ173 يقسم $a+b$.

4. **ا.** حسب السؤال **2**: 173 لا يقسم a $\Longleftrightarrow$ 173 لا يقسم b
اذن 173 أولي مع a و b ومنه حسب مبرهنة فيرما

$$a^{172}\equiv 1[173]$$
$$b^{172}\equiv 1[173]$$

اي ان $a^{172}\equiv b^{172}[173]$.

ب. حسب السؤال **1**: $b^{172}\equiv -ba^{171}[173]$ ، اذن $a^{172}\equiv -ba^{171}[173]$ ومنه

$$a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$$

ج. حسب السؤال السابق العدد الأولي 173 يقسم $a+b$ أو a^{171}.
اذا كان 173 يقسم a^{171} فهو يقسم a وهذا تناقض! اذن 173 يقسم $a+b$.

الجزء الثاني

1. لدينا

$$\begin{aligned}x^3+y^3=173(xy+1) &\Longleftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)=173(xy+1)\\ &\Longleftrightarrow 173k((x-y)^2+xy)=173(xy+1)\\ &\Longleftrightarrow k((x-y)^2+xy)=xy+1\\ &\Longleftrightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1\end{aligned}$$

2. نفترض أن $k>1$. بما أن $k(x-y)^2\geqslant 0$ فان $(k-1)xy\leqslant 1$
أي أن $(k-1)xy=1$ ومنه x و y قاسمان موجبان ل1، ما معناه أن $x=y=1$ وهذا تناقض لأن 173 يقسم $x+y$. ومنه $k=1$.
بالتعويض فيما سبق، نجد $(x-y)^2=1$ ، فنحصل على النظمتين

$$\begin{cases}x+y=173\\ x-y=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=173\\ x-y=-1\end{cases}$$

بعد الحل نجد

$$(x,y)\in\{(87,86),(86,87)\}$$

عكسيا اذا كان $(x,y)\in\{(87,86),(86,87)\}$ نتحقق أن $x^3+y^3=173(xy+1)$
مجموعة حلول المعادلة (E) اذن هي

$$\{(87,86),(86,87)\}$$

الأعداد العقدية

1. **ا.** لدينا

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1-\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}{z_2-\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}\times\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1^2-z_1z_2}{z_2^2-z_1z_2}\times\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_1}=-1$$

ب. يما أن $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}\in\mathbb{R}$ فان النقط O,M,M_1,M_2 متداورة، أي أن النقطة M تنتمي الى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2.

2. اذا كان $z_2=\overline{z_1}$ فان

$$z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{2|z_1|^2}{2\mathrm{Re}(z_1)}=\frac{|z_1|^2}{\mathrm{Re}(z_1)}\in\mathbb{R}$$

اذن M تنتمي الى المحور الحقيقي.

3. حسب الصيغة العقدية للدوران

$$r(M_1)=M_2\iff z_2=\mathrm{e}^{i\alpha}z_1$$

لنحسب z

$$z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{2\mathrm{e}^{i\alpha}z_1^2}{(1+\mathrm{e}^{i\alpha})z_1}=\frac{2\mathrm{e}^{i\alpha}z_1}{1+\mathrm{e}^{i\alpha}}$$

ومنه

$$MM_1=|z_1-z|=\left|z_1-\frac{2\mathrm{e}^{i\alpha}z_1}{1+\mathrm{e}^{i\alpha}}\right|=\left|\frac{1-\mathrm{e}^{i\alpha}}{1+\mathrm{e}^{i\alpha}}\right||z_1|$$
$$MM_2=|z_2-z|=\left|\mathrm{e}^{i\alpha}z_1-\frac{2\mathrm{e}^{i\alpha}z_1}{1+\mathrm{e}^{i\alpha}}\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}-1}{1+\mathrm{e}^{i\alpha}}\right||\mathrm{e}^{i\alpha}z_1|=\left|\frac{1-\mathrm{e}^{i\alpha}}{1+\mathrm{e}^{i\alpha}}\right||z_1|$$

$$\iff MM_2=MM_1$$

اذن M تنتمي الى واسط القطعة $[M_1M_2]$.

4. **ا.** حسب الافتراض

$$z_1+z_2=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+1}{6}\quad\text{و}\quad z_1z_2=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-1}{6}$$

اذن

$$z=\frac{2(\mathrm{e}^{i\theta}-1)}{\mathrm{e}^{i\theta}+1}$$

ب. نعلم أن $\mathrm{e}^{i\theta}-1=-2\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}$ وأن $\mathrm{e}^{i\theta}+1=2\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}$ ومنه الشكل المثلثي ل z هو

$$z=-2\tan\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\pi}$$

حيث $|z|=2\tan\frac{\theta}{2}>0$ لأن $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $\arg z\equiv\pi[2\pi]$

التحليل I

الجزء الأول

1. ليكن $x > 0$. لدينا الدالة $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ متصلة على $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$، اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

$$\begin{aligned}
&(\exists \theta \in]0, x[) \quad \varphi'(\theta) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \\
\iff &(\exists \theta \in]0, x[) \quad -\mathrm{e}^{-\theta} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} \\
\iff &(\exists \theta \in]0, x[) \quad \mathrm{e}^{\theta} = \frac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}}
\end{aligned}$$

2. **ا.** ليكن $x > 0$. حسب السؤال السابق $(\exists \theta \in]0, x[) \quad \mathrm{e}^{\theta} = \frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}$، وبما أن $\theta > 0$ فان $\mathrm{e}^{\theta} > 1$ ومنه

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}} > 1 \\
\iff &x > 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad (\text{لاحظ أن } 1 - \mathrm{e}^{-x} > 0)
\end{aligned}$$

ب. ليكن $x > 0$. بما أن $\theta < x$ فان

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\theta - x} < 1 \\
\iff &\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} < 1 \\
\iff &\frac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1} < 1 \\
\iff &x + 1 < \mathrm{e}^{x} \quad (\text{لاحظ أن } \mathrm{e}^{x} - 1 > 0)
\end{aligned}$$

ج. ليكن $x > 0$ نعلم أن $0 < \theta < x$، اذن

$$\begin{aligned}
&1 < \mathrm{e}^{\theta} < \mathrm{e}^{x} \\
\iff &1 < \frac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}} < \mathrm{e}^{x} \\
\iff &1 < \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1} < \mathrm{e}^{x} \\
\iff &0 < \ln\left(\frac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1}\right) < x
\end{aligned}$$

الجزء الثاني

1. **ا.** بما أن

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0+} \mathrm{e}^{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0+} \frac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 = f(0)$$

فان f متصلة على يمين الصفر.

ب. لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1} = 0$$

لأن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}=0$$

التأويل الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$.

2. **ا.** بما أن $\mathrm{e}^0\geqslant 1$ فانه حسب السؤال **2** من الجزء الأول

$$(\forall x\geqslant 0)\quad 1-x\leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

ليكن $x\geqslant 0$ و $t\in[0,x]$. اذن:

$$(\forall t\in[0,x])\quad 1-t\leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

الدوال $t\mapsto 1-t$ و $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}$ متصلة على المجال $[0,x]$ اذن

$$\begin{aligned}&\int_0^x(1-t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\ &\iff\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\leqslant\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x\\ &\iff x-\frac{x^2}{2}\leqslant-\mathrm{e}^{-x}+1\end{aligned}$$

ب. بنفس الطريقة، ليكن $x\geqslant 0$، لدينا

$$(\forall t\in[0,x])\quad t-\frac{t^2}{2}\leqslant-\mathrm{e}^{-t}+1$$

الدوال $t\mapsto t-\frac{t^2}{2}$ و $t\mapsto -\mathrm{e}^{-t}+1$ متصلة على المجال $[0,x]$ اذن

$$\begin{aligned}&\int_0^x\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\left(-\mathrm{e}^{-t}+1\right)\mathrm{d}t\\ &\iff\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^x\leqslant\left[\mathrm{e}^{-t}+t\right]_0^x\\ &\iff\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leqslant\mathrm{e}^{-x}+x-1\end{aligned}$$

من جهة اخرى

$$x-\frac{x^2}{2}\leqslant-\mathrm{e}^{-x}+1\iff\mathrm{e}^{-x}+x-1\leqslant\frac{x^2}{2}$$

اذن

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leqslant\mathrm{e}^{-x}+x-1\leqslant\frac{x^2}{2}$$

3. **ا.** لكل $x>0$

$$\frac{f(x)-1}{x}=\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\frac{\mathrm{e}^{-x}+x-1}{x^2}f(x)$$

ب. حسب السؤال **2 ب**

$$(\forall x>0)\quad \frac{1}{2}-\frac{x}{6}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}+x-1}{x^2}\leqslant\frac{1}{2}$$
$$\iff(\forall x>0)\quad \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}+x-1}{x^2}f(x)\leqslant\frac{f(x)}{2}\qquad (\text{لاحظ أن } f(x)>0)$$
$$\iff(\forall x>0)\quad \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\leqslant\frac{f(x)-1}{x}\leqslant\frac{f(x)}{2}$$

بما أن

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)=\frac{1}{2}\quad \text{و}\quad \lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{2}=\frac{1}{2}$$

فانه حسب خاصيات النهاية والتأطير

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$$

التأويل: f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر مع $f'_d(0)=\frac{1}{2}$

4. **ا.** لدينا لدينا

- $x\mapsto \mathrm{e}^x-1$ قابلة للاشتقاق ولاتنعدم على $]0,+\infty[$ اذن $x\mapsto\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$
- $x\mapsto x\mathrm{e}^x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ كجداء دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

اذن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ كجداء دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومنه

$$(\forall x>0)\quad f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$$

ب. حسب السؤال **2 ب** من الجزء الأول

$$(\forall x>0)\quad \mathrm{e}^x-x-1>0$$

وبما أن

$$(\forall x>0)\quad (\mathrm{e}^x-1)^2>0\quad \text{و}\quad (\forall x>0)\quad \mathrm{e}^x>0$$

فان

$$(\forall x>0)\quad f'(x)>0$$

أي أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

الجزء الثالث

1. لبرهن على النتيجة بالترجع. من أجل $n=0$ لدينا $u_0>0$

ليكن $n\in\mathbb{N}$، نفترض أن $u_n>0$ ونبين أن $u_{n+1}>0$ حسب الترجع

$$u_n>0$$
$$\Longrightarrow f(u_n)>f(0)=1\quad (\text{لاحظ أن } f \text{ تزايدية قطعا})$$
$$\Longrightarrow u_{n+1}=\ln(f(u_n))>0$$

وهو المطلوب

2. ليكن $n \in \mathbb{N}$، حسب السؤال **2 ج** من الجزء الأول

$$u_{n+1} = \ln(f(u_n)) = \ln\left(\frac{u_n e^{u_n}}{e^{u_n}-1}\right) < u_n$$

اذن (u_n) تناقصية قطعا، وبما أنها مصغورة فهي متقاربة

3. بما أن $\ln(f(x)) < x$ لكل $x > 0$ وأن $\ln(f(0)) = 0$ فان 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln(f(x)) = x$، و لدينا

- (u_n) متتالية متقاربة
- $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in]0, +\infty[$
- الدالة $x \mapsto \ln(f(x))$ متصلة على المجال $]0, +\infty[$
- $(\forall x > 0) \quad \ln(f(x)) > 0$

اذن نهاية (u_n) هي حل للمعادلة $\ln(f(x)) = x$ ومنه

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

التحليل II

1. **ا.** ليكن $x \in I$. لندرس الاشارة حسب الحالات:

حالة $0 < x \leqslant \ln 2$

الدالة $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}$ متصلة على المجال $[x, \ln 2]$، ولدينا

$$\begin{aligned}
(\forall t \in [x, \ln 2]) \qquad & \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} \geqslant 0 \\
\Longrightarrow \qquad & \int_x^{\ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \geqslant 0 \\
\Longrightarrow \qquad & \int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \leqslant 0 \\
\Longrightarrow \qquad & F(x) \leqslant 0
\end{aligned}$$

حالة $x \geqslant \ln 2$

الدالة $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}$ متصلة على المجال $[\ln 2, x]$، ولدينا

$$\begin{aligned}
(\forall t \in [\ln 2, x]) \qquad & \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} \geqslant 0 \\
\Longrightarrow \qquad & \int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \geqslant 0 \\
\Longrightarrow \qquad & F(x) \geqslant 0
\end{aligned}$$

اذن F موجبة على المجال $[\ln 2, +\infty[$ و سالبة على المجال $]0, \ln 2]$

ب. بما أن الدالة $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}$ متصلة على المجال I، وF هي دالة أصلية للدالة $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}$ على المجال I، فان F قابلة للاشتقاق على I ولدينا

$$(\forall x \in I) \quad F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$$

ج. لكل $x \in I$، $F'(x) > 0$ اذن F تزايدية قطعا على I

2. **ا.** ليكن $x \in I$، بوضع $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$، لدينا

$$\begin{aligned} t = \ln(u^2+1) &\Longrightarrow \mathrm{d}t = \frac{2u\mathrm{d}u}{u^2+1} \\ t = \ln 2 &\Longrightarrow u = 1 \\ t = x &\Longrightarrow u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \end{aligned}$$

اذن

$$F(x) = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u\mathrm{d}u}{u^2+1} = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \frac{2\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\left[\arctan u\right]_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = 2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \frac{\pi}{2}$$

ب. حسب ما سبق،

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} 2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

لأن

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{\mathrm{e}^x-1} = 0$$

و الدالة $\arctan$ متصلة في الصفر مع $\arctan 0 = 0$

وبنفس الطريقة

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} 2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

لأن

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\mathrm{e}^x-1} = +\infty$$

$$\lim_{X\to +\infty} 2\arctan X = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi$$

3. **ا.** الدالة F متصلة وتزايدية قطعا على I، اذن فهي تقابل من I نحو J بحيث

$$J = \left]\lim_{x\to 0+} F(x), \lim_{x\to +\infty} F(x)\right[= \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

ب. ليكن $x \in I$، نضع $y = F(x)$، اذن

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Longleftrightarrow y = 2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \frac{\pi}{2} \\ &\Longleftrightarrow \arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} = \frac{1}{2}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{\mathrm{e}^x-1} = \tan\left(\frac{1}{2}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &\Longleftrightarrow x = \ln\left(1+\tan^2\left(\frac{1}{2}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

اذن

$$(\forall x \in J) \quad F^{-1}(x) = \ln\left(1+\tan^2\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

* *

*