

Durée : 02 heures

○ Exercice n°01 :(03 pts)

- 1
0,75
1,25
- 1)- a)- Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
b)- En déduire le reste de la division euclidienne de $a = 2^{2048}$ par 5.
2)- Soit x un entier naturel tel que : $x \equiv 2[5]$.
✓ Montrer que le nombre $b = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2047}$ est divisible par 5.

○ Exercice n°02 :(03 pts)

- 0,5
0,5
0,75
0,5
0,75
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
- $$a_n = n^3 - 2n + 5 \text{ et } b_n = n + 1 .$$
- 1)- a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n = b_n(n^2 - n - 1) + 6$.
b)- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); a_n \wedge b_n = b_n \wedge 6$, puis donner les valeurs possibles de $a_n \wedge b_n$.
2)- a)- quels sont les valeurs de l'entier naturel n tel que : $\frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{N}$?
b)- Quels sont les valeurs de l'entier naturel n tel que : $a_n \wedge b_n = 6$?
c)- Quels sont les valeurs de l'entier naturel n tel que : $a_n \wedge b_n = 3$?

○ Exercice n°03 :(04 pts)

- 1
1
1
1
- ABC est un triangle rectangle en A tel que : $(\overline{BC}, \overline{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Le point I étant le milieu de $[BC]$ et r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 1)- Montrer que le triangle AIB est équilatéral et que : $r(B) = I$.
2)- La parallèle à (BC) passant par A et la parallèle à (AI) passant par C se coupent au point D .
a)- Montrer que : $(\overline{AI}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, et que : $r(I) = D$.
b)- On pose : $J' = r(J)$ où est J le milieu du segment $[IB]$.
✓ Montrer que les points I et J' et D sont alignés .
3)- E est la projection orthogonale de J sur la droite (AI) et la parallèle à (ID) passant par E coupe la droite (AD) en F .
✓ Montrer que : $r(E) = F$ et que : $(AD) \perp (FJ')$.

○ Exercice n°04 :(05 pts)

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 1 - x + \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} .$$

- 0,75
0,5
0,75
1
0,75
0,25
1
- 1)- a)- Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b)- Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ_1) puis étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ_1) .
c)- Montrer que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ_2) puis étudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ_2) .
2)- a)- Etudier la dérivabilité de f à droite en $a = 1$ et à gauche en $b = -1$, puis interpréter géométriquement chaque résultats .
b)- Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $]-\infty, -1[$ et que :
$$(\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[); f'(x) = \frac{(2 - x^2)(x^4 + x^2 + 2)}{x^2 \sqrt{x^2 - 1} (2 + x^2 \sqrt{x^2 - 1})} .$$

c)- Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse .
3)- Construire (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

○ Exercice n°05 :(05 pts)

Soit (C_m) la courbe de fonction f_m définie sur \mathbb{R} par :

$$f_m(x) = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x + 1 - m .$$

- 0,75
0,75
0,75
0,75
1
1
- 1)- a)- Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A .
b)- Montrer que toutes les courbes (C_m) admettent en A la même tangente .
c)- Etudier suivant m les variations de f_m .
2)- Construire la courbe $(C_{\frac{3}{2}})$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
3)- On considère la droite (D_k) d'équation : $kx - 4y - 2 = 0$, où $k \in \mathbb{R}$.
a)- Déterminer l'ensemble des nombres réels k pour lesquels la droite (D_k) coupe la courbe $(C_{\frac{3}{2}})$ en deux points distinctes M et M' autres que $B(0, \frac{-1}{2})$.
b)- Soit N le milieu du segment $[MM']$.
✓ Quel est l'ensemble des points N , lorsque k décrit \mathbb{R} ? Justifier votre réponse .