ثانوية موسى بن نصير	تجريبي الرياضيات رقم 01	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الأولى 2015/2014	مدة الإنجاز : أربع ساعات
		ذ : عبدالله بن الختير

✓ **تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة:**

■ التمرين رقم 01:

⇦ لتكن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n=S_{2n}$ و $v_n=S_{2n+1}$.

1)- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متحاديتان ، ماذا تستنتج ؟

2)- أ- بين أن : $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\le\ln(1+x)\le\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k;(\forall x\in\mathbb{R}^+)$.

ب- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n\le\ln 2\le v_n$ ، ثم حدد النهاية المشتركة لكل من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);|S_n-\ln 2|\le\frac{1}{n}$ ، ثم إستنتج أن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

■ التمرين رقم 02:

⇦ ليكن $\alpha\in]1,e+1[\cup]e+1,+\infty[$.

1)- بين أنه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!u_n\in\mathbb{R}^+);e^{u_n}+(u_n)^n=\alpha$.

2)- نفترض فيما يلي أن : $\alpha\in]e+1,+\infty[$.

أ- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

ب- أحسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}n(u_n-1)=\ln(\alpha-e)$.

3)- نفترض فيما يلي أن : $\alpha\in]e,e+1[$.

أ- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

ب- أحسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}n(u_n-1)=\ln(\alpha-e)$.

4)- نفترض فيما يلي أن : $\alpha\in]1,e[$.

أ- بين أن : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln\alpha$.

ب- أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha(\ln(\alpha)-u_n)}{(\ln\alpha)^n}=1$.

5)- نفترض فيما يلي أن : $\alpha=e$.

■ أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln\alpha$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(1-u_n)}{\ln n}=1$.

■ **التمرين رقم 03:**

I- لتكن f الدالة المعرفة على $[0,1[$ بما يلي :

$$f(0)=0 \text{ و } \left(\forall x\in]0,1[\right); f(x)=\frac{x}{\ln x}.$$

1)- بين أن f متصلة على المجال $[0,1[$.

2)- بين أن : $\left(\forall x\in]0,1[\right); f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ ، ثم إستنتج رتابة f على $[0,1[$.

II- لتكن G الدالة المعرفة على $[0,1[$ بما يلي :

$$G(0)=0 \text{ و } \left(\forall x\in]0,1[\right); G(x)=\frac{F(x)}{x}$$

حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f على $[0,1[$ و التي تحقق : $F(0)=0$.

1)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in]0,1[\right)\left(\exists \alpha\in]0,x[\right); G(x)=f(\alpha)$.

ب- إستنتج أن الدالة G متصلة على اليمين في الصفر .

2)- أ- ليكن $x\in]0,1[$ ، بتطبيق مبرهنة رول على الدالة : $\varphi: t\mapsto t^2F(x)-x^2F(t)$

■ بين أنه : $\left(\exists \beta\in]0,x[\right); \frac{G(x)}{x}=\frac{1}{2\ln(\beta)}$.

ب- أدرس قابلية الدالة G على اليمين في الصفر و أول النتيجة هندسيا .

3)- أ- بين أن قابلة للإشتقاق على $]0,1[$ و أن :

$$\left(\forall x\in]0,1[\right); G'(x)=\frac{f(x)-G(x)}{x}.$$

ب- إستنتج أن الدالة G تناقصية قطعا على المجال $[0,1[$.

4)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in]0,1[\right); f(x)>\frac{x}{x-1}$.

ب- إستنتج أن : $\left(\forall x\in]0,1[\right); G(x)<1+\frac{\ln(1-x)}{x}$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to 1^-} G(x)$.

5)- ضع جدول تغيرات G على $[0,1[$ ، ثم أرسم المنحنى (C_G) .

■ التمرين رقم 04:

I- لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x)=x-2\ln\left(\left|\frac{1}{2}e^{x}-1\right|\right).$$

1)- حدد D_f ، ثم بين أن $\left(C_f\right)$ متماثل بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته : $x=\ln 2$.

2)- أ- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^{+}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y=-x+2\ln 2$.

3)- أ- بين أن f قابلة للإشتقاق على كل مجال من D_f وأن :

$$\left(\forall x\in D_f\right);\ f'(x)=\frac{2+e^{x}}{2-e^{x}}.$$

ب- ضع جدول تغيرات f على D_f .

4)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in D_f\right);\ f''(x)>0$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $\left(C_f\right)$ ؟

ب- أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

II- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left]\ln 2,+\infty\right[$.

1)- بين أن g تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده .

2)- حدد التقابل العكسي g^{-1} .

3)- نضع : $\alpha=g^{-1}(0)$ ، بين أن : $\left(\forall x\in\left]\ln 2,\alpha\right]\right);x-\dfrac{g(x)}{g'(x)}\le\alpha$.

III- لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0=\ln 3 \text{ و } (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=u_n-\frac{g\left(u_n\right)}{g'\left(u_n\right)}.$$

1)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in\left]\ln 2,\alpha\right]$.

2)- بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

3)- حدد نهاية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

إنتهى الموضوع .