الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين	تجريبي مادة الرياضيات	2 باك علوم رياضية
جهة الرباط سلا زمور زعير – نيابة الخميسات	دورة ماي 2011/2010	المعامل : 09
ثانوية موسى بن نصير		مدة الإنجاز : 04 ساعات

■ التمرين رقم 01: $\left(04pts\right)$

في كل ما يلي المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

و الجزءان **الأول** و **الثاني** غير مرتبطين فيما بينهما .

⇦ الجزء الأول: $\left(02pts\right)$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$\left(\mathrm{E}_\theta\right): z^2-2iz-\left(1+e^{2i\theta}\right)=0 \text{ ، حيث } \theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

1)- ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، بين أن :

$$e^{ix}+e^{iy}=2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \text{ و } e^{ix}-e^{iy}=2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} .$$

2)- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(\mathrm{E}_\theta\right)$ ، ثم أكتب الحلين z_1 و z_2 على شكليهما الأسي .

3)- لتكن A و B النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2 .

أ- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية و أن المثلث OAB قائم الزاوية .

ب- ما هي قيمة البارامتر الحقيقي θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الساقين ؟

⇦ الجزء الثاني: $\left(02pts\right)$

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $b+i$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

و ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و النقطة B' هي صورة B بالدوران r .

1)- أعط الكتابة العقدية للدوران r ، ثم أحسب $aff\left(B'\right)$ بدلالة a و b .

2)- بين أن : $B'\in\left(Oy\right)\Leftrightarrow a+b=\sqrt{3}$ ، ثم عبر في هذه الحالة عن $aff\left(B'\right)$ بدلالة a .

3)- نفترض فيما يلي أن : $a=\sqrt{3}$ و $b=0$.

و لتكن C و D النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي : $c=-i$ و $d=2+\sqrt{3}(1-2i)$.

أ- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟ أحسب $\frac{d-a}{c-a}$ وإستنتج طبيعة المثلث ACD .

ب- نضع : $E=r(D)$ و لتكن F صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AC}$.

⇦ أحسب لحقي النقطتين E و F ، ثم أثبت أن المثلث BEF متساوي الأضلاع .

■ **التمرين رقم 02**: $\left(02pts\right)$

ليكن المجال $G=[0;1[$ ، و لكل (a,b) من $G\times G$ نضع :

$a*b=a+b-\mathrm{E}(a+b)$ ، حيث $\mathrm{E}(\alpha)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي α .

1)- بين أن * قانون تركيب داخلي في G .

2)- بين أن القانون * تبادلي و تجميعي في G .

3)- بين أن * يقبل عنصرا محايدا في G (ينبغي تحديده) .

4)- بين أن كل عنصر a من G يقبل مماثلا a' (ينبغي تحديده) بالنسبة للقانون * .

5)- ليكن $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، حل في المجموعة G المعادلة : $(\mathrm{F}):\underbrace{x*x*....*x}_{n\ fois}=\frac{1}{n}$.

■ **التمرين رقم 03**: $\left(04pts\right)$

الجزءان الأول و الثاني غير مرتبطين فيما بينهما .

⇦ **الجزء الأول**: $\left(1{,}25pts\right)$

1)- حدد عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم n_0 يحقق : $\left(2^3\right)^{n_0}\equiv 1[17]$ و $\left(5^2\right)^{n_0}\equiv 1[17]$.

2)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);5^{32n+1}-2^{48n+2}\equiv 1[17]$.

⇦ **الجزء الثاني**: $\left(2{,}75pts\right)$

1)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(\mathrm{E}):ax\equiv 1[p]$.

حيث a عنصر من $A_p=\{1;2;3;...;p-1\}$ و $p\geq 3$ عدد أولي .

أ- بين أن العدد a^{p-2} حل للمعادلة (E) .

ب- ليكن r باقي القسمة الأقليدية ل a^{p-2} على p ، بين أن $r\in A_p$ و أن r هو الحل الوحيد للمعادلة (E) في المجموعة A_p .

2)- نأخذ فيما يلي من التمرين $p=31$.

أ- حدد قيمة r من أجل $a=2$ و $a=3$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ كل معادلة مما يلي : $(\mathrm{F}_1):2x\equiv 1[31]$ و $(\mathrm{F}_2):3x\equiv 1[31]$.

ج- إستنتج مجموعة حلول المعادلة : $(\mathrm{F}):6x^2-5x+1\equiv 0[31]$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

■ **التمرين رقم 04**: $\left(10pts\right)$

⇦ **الجزء الأول**: $\left(02pts\right)$

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\left(\forall t\in\mathbb{R}\right);h\left(t\right)=e^{t}-\left(t+1\right).$$

1)- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);e^{x}=1+x+\dfrac{x^{2}}{2}+\int_{0}^{x}h\left(t\right)dt$.

2)- حدد منحى تغيرات الدالة h على كل من المجالين $\left[0;+\infty\right[$ و $\left]-\infty;0\right]$.

3)- ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$ ، بين أن : $0\leq\int_{0}^{x}h\left(t\right)dt\leq xh\left(x\right)$ و $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{e^{x}-\left(x+1\right)}{x^{2}}\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{h\left(x\right)}{x}$.

4)- ليكن $x\in\mathbb{R}^{*-}$ ، بين أن : $xh\left(x\right)\leq\int_{0}^{x}h\left(t\right)dt\leq 0$ و $\dfrac{1}{2}+\dfrac{h\left(x\right)}{x}\leq\dfrac{e^{x}-\left(x+1\right)}{x^{2}}\leq\dfrac{1}{2}$.

5)- أحسب : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h\left(x\right)}{x}$ ، ثم إستنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-\left(x+1\right)}{x^{2}}$.

⇦ **الجزء الثاني**: $\left(03pts\right)$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*}\right);\ f\left(x\right)=\frac{x}{e^{x}-1}\ \text{و}\ f\left(0\right)=1 .$$

1)- بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

2)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(C_{f}\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3)- بين أن f قابلة للإشتقاق في الصفر (إستعمل نتيجة الجزء الأول **5)**-) .

4)- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*}\right);\ f'\left(x\right)=\dfrac{\varphi\left(x\right)}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$ ، حيث $\varphi\left(x\right)=\left(1-x\right)e^{x}-1$.

5)- أدرس تغيرات φ على $\mathbb{R}$ وإستنتج إشارتها على $\mathbb{R}^{*}$.

6)- ضع جدول تغيرات الدالة f .

7)- أرسم المنحنى $\left(C_{f}\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ مبرزا المماس في النقطة ذات الأفصول $x_{0}=0$.

⇦ **الجزء الثالث**: $\left(02pts\right)$

لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ و $u_0=1$.

1)- بين أن المعادلة : $\left(\mathrm{E}\right):f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ينبغي تحديده .

2)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right);f'\left(x\right)+\frac{1}{2}=\frac{e^{2x}-2xe^{x}-1}{2\left(e^{x}-1\right)^{2}}$.

ب- بين أن لكل $x\in\mathbb{R}^{+}$: $e^{2x}-2xe^{x}-1\geq 0$ ، ثم إستنتج أن : $-\frac{1}{2}\leq f'\left(x\right)<0$.

3)- أ- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right|$.

ب- إستنتج أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\left|u_n-\alpha\right|\leq\frac{1}{2^n}\left(1-\alpha\right)$ ، ثم أحسب نهاية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

⇦ **الجزء الرابع**: $\left(03pts\right)$

لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\mathrm{F}\left(x\right)=\int_{x}^{2x}f\left(t\right)dt$.

1)- بين أن : $\left(\forall x\in\left[0;+\infty\right[\right);0\leq\mathrm{F}\left(x\right)\leq xf\left(x\right)$ ، ثم إستنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}\left(x\right)$.

2)- بين أن : $\left(\forall x\in\left]-\infty;0\right]\right);\mathrm{F}\left(x\right)\leq xf\left(x\right)$ ، ثم إستنتج : $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{F}\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{F}\left(x\right)}{x}$.

3)- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن :

$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*}\right);\mathrm{F}'\left(x\right)=\frac{x\left(3-e^{x}\right)}{e^{2x}-1}$ و $\mathrm{F}'\left(0\right)=1$.

4)- ضع جدول تغيرات الدالة F ، ثم أرسم المنحنى $\left(C_{\mathrm{F}}\right)$ في معلم متعامد و ممنظم .

(نعطي : $\ln 3\simeq 1{,}1$ و $\mathrm{F}\left(\ln 3\right)\simeq 0{,}44$) .

■ **التمرين الإضافي**: $\left(02\,pts\,plus\right)$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f\left(x\right)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

1)- بين أن : $\left(\forall x\in\left[0;1\right]\right);1+\frac{x^2}{2}\leq f\left(x\right)\leq 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}$.

2)- أحسب نهاية المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ المعرفة بما يلي : $u_n=\left(\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\right)-n$.