

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسلكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها	الشعبة أو المسلك

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتوزع حسب المجالات كما يلي :

3 نقط	الهندسة الفضائية	التمرين الأول
3 نقط	الأعداد العقدية	التمرين الثاني
3 نقط	حساب الاحتمالات	التمرين الثالث
11 نقطة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل والمتتاليات العددية	المسألة

- بالنسبة للمسألة ، In يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد معنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين $A(2, 1, 0)$ و $B(-4, 1, 0)$

(1) ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ متجهة منظمية عليه . 0.5

بين أن $x + y - z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P)

(2) لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ 0.75

بين أن (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(-1, 1, 0)$ وشعاعها 3

(3) أ- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) ثم استنتج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) 0.5

ب- بين أن مركز الدائرة (C) هو النقطة $H(0, 2, -1)$ 0.5

(4) بين أن $\overline{OH} \wedge \overline{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ ثم استنتج مساحة المثلث OHB 0.75

I- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(1) بين أن معيار العدد العقدي a هو $2\sqrt{2} + \sqrt{2}$ 0.5

(2) تحقق من أن $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin\frac{\pi}{4}$ 0.25

(3) أ- باخطاط $\cos^2 \theta$ ، حيث θ عدد حقيقي ، بين أن $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$ 0.25

ب- بين أن $a = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$ (نذكر أن $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$) 0.5

ج- بين أن $4 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ هو شكل مثلثي للعدد a ثم بين أن $a^4 = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}\right)^4 i$ 0.5

II- نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد معنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقطتين Ω و A اللتين لهما

على التوالي هما ω و a بحيث $\omega = \sqrt{2}$ و $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$

(1) بين أن اللق b للنقطة B صورة النقطة A بالدوران R هو $2i$ 0.5

(2) حدد مجموعة النقط M ذات اللق z بحيث $|z - 2i| = 2$ 0.5

يحتوي صندوق U_1 على 7 كرات : أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)
و يحتوي صندوق U_2 على 5 كرات : ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

الصندوق U_2 الصندوق U_1

(I) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 2

ليكن A الحدث : " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين "

و B الحدث : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

بين أن $p(A) = \frac{12}{35}$ و $p(B) = \frac{1}{7}$

(II) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_1 ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_2 1

ليكن C الحدث : " الحصول على ثلاث كرات حمراء "

بين أن $p(C) = \frac{6}{35}$

www.riyadiyat.net

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة : 2 cm)

(1) بين أن $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$ هي مجموعة تعريف الدالة f 0.5

(2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ و أول هندسيا النتيجة و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . 0.75

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده . 0.5

ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x) = x - x \ln x$) 0.5

(3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f 0.75

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1[$ و تزايدية على كل من المجالين $]1, e[$ و $]e, +\infty[$ 1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f 0.25

(II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

و ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)

(1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x) = 0$, $x \in]0, +\infty[$ 0.5

ب- نعطي جدول القيم التالي : 0.5

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

(2) أ- تحقق من أن $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى

(C_f) في النقطتين اللتين أفصولهما 1 و α

ج- حدد ، انطلاقا من (C_g) ، إشارة الدالة g على المجال $]1, \alpha[$ و بين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $]1, \alpha[$ 0.5

(3) أنشئ ، في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) 1.25

(4) أ- بين أن $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$ (لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\ln x}$ لكل x من D_f) 0.75

ب- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين

الذين معادلتهما $x = \sqrt{e}$ و $x = 1$

(III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}

(1) بين بالترجع أن $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من \mathbb{N} 0.5

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (2) ج-) 0.5

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها . 0.75

