التمرين 1:

ندكر أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية وكاملة.

1. نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ \ x*y=x+y-2$.

أ- ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$. بما أن $+$ قانون تبادلي في $\mathbb{Z}$ ، فإن : $x*y=x+y-2=y+x-2=y*x$.

إذن : $*$ قانون تبادلي في $\mathbb{Z}$.

ليكن (x,y,z) عنصرا من $\mathbb{Z}^3$. بما أن $+$ قانون تبادلي وتجميعي في $\mathbb{Z}$ ، فإن :

$$\begin{aligned}(x*y)*z&=(x*y)+z-2\\&=(x+y-2)+z-2\\&=x+(y+z-2)-2\\&=x+(y*z)-2\\&=x*(y*z)\end{aligned}$$

إذن : $*$ قانون تجميعي في $\mathbb{Z}$.

ب- لنبين أن : $\exists!e\in\mathbb{Z},\ \ \forall x\in\mathbb{Z},\ \ e*x=x*e=x$. وبما أن $*$ قانون تبادلي في $\mathbb{Z}$ ، فإنه يكفي أن نبين أن : $\exists!e\in\mathbb{Z},\ \ \forall x\in\mathbb{Z},\ \ e*x=x$.

ليكن $x\in\mathbb{Z}$ ، لدينا : $e*x=x\Leftrightarrow e+x-2=x\Leftrightarrow e=2$ و $e=2\in\mathbb{Z}$، إذن : $e=2$ هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{Z}$.

جـ- لدينا:

- ✓ $\mathbb{Z}\neq\varnothing$ و $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{Z}$.
- ✓ $*$ قانون تبادلي و تجميعي في $\mathbb{Z}$.
- ✓ 2 هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{Z}$.
- ✓ ليكن $x\in\mathbb{Z}$. لنبين أن : $\exists!y\in\mathbb{Z},\ \ x*y=y*x=2$ ، وبما أن $*$ قانون تبادلي في $\mathbb{Z}$، فإنه يكفي أن نبين أن: $\exists!y\in\mathbb{Z},\ \ x*y=2$. ليكن y عنصرا من $\mathbb{Z}$،
  لدينا : $x*y=2\Leftrightarrow x+y-2=2\Leftrightarrow y=4-x$ و $4-x\in\mathbb{Z}$،
  إذن : $\forall x\in\mathbb{Z},\ \ \exists!x'(=4-x)\in\mathbb{Z},\ \ x*x'=x'*x=2$.

وبالتالي فإن : $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية.

2. نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ x\mathrm{T}y=xy-2x-2y+6$

ونعتبر التطبيق :
$$f:\ (\mathbb{Z},\times)\to(\mathbb{Z},\mathrm{T})$$
$$x\mapsto f(x)=x+2$$

أ- ملاحظة : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ x\mathrm{T}y=xy-2x-2y+6=(x-2)(y-2)+2$.

ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$. لدينا :
$$f(x)\mathrm{T}f(y)=(x+2)\mathrm{T}(y+2)=(x+2-2)(y+2-2)+2=xy+2=f(x\times y)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$.

لنبين أن : $\forall y\in\mathbb{Z},\ \exists! x\in\mathbb{Z},\ f(x)=y$.

ليكن y عنصرا من $\mathbb{Z}$ ، لدينا : $f(x)=y\Leftrightarrow x+2=y\Leftrightarrow x=y-2$ و $x=y-2\in\mathbb{Z}$ ، ومنه نستنتج أن f تطبيق تقابلي من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ ، وبالتالي فإن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$.

ب- نعتبر (x,y,z) عنصرا من $\mathbb{Z}^3$. لدينا :

$$\begin{aligned}(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)&=(x\mathrm{T}z)+(y\mathrm{T}z)-2\\&=(x-2)(z-2)+2+(y-2)(z-2)+2-2\\&=(x+y-4)(z-2)+2\\&=((x*y)-2)(z-2)+2\\&=(x*y)\mathrm{T}z\end{aligned}$$

3. من الأسئلة السابقة نستنتج أن :

- ✓ $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية.
- ✓ T قانون تركيب داخلي في $\mathbb{Z}$.
- ✓ $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية ، إذن : $\times$ تجميعي و تبادلي في $\mathbb{Z}$ و 1 هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$ في $\mathbb{Z}$.

وبما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$ ، فإن : T تجميعي و تبادلي في $\mathbb{Z}$ و $3=f(1)$ هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون T في $\mathbb{Z}$.

- ✓ ونعلم أن : T و $*$ قانونين تبادليين في $\mathbb{Z}$ ، فإن : وبما أن $\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3,\ (x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)=(x*y)\mathrm{T}z$
T قانون توزيعي على القانون $*$ في $\mathbb{Z}$.

وبالتالي فإن : $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية وواحدية.

4. أ- ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{Z}^2$، بما أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة كاملة (i) : ، فإن :

$$x\,\mathrm{T}y=2\Leftrightarrow(x-2)(y-2)+2=2$$
$$x\,\mathrm{T}y=2\Leftrightarrow(x-2)(y-2)=0$$
$$x\,\mathrm{T}y=2\Leftrightarrow x-2=0 \quad \text{أو} \quad y-2=0 \ (\mathrm{i})$$
$$x\,\mathrm{T}y=2\Leftrightarrow x=2 \quad \text{أو} \quad y=2$$

ب- لدينا: $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية وواحدية عنصرها المحايد 2 و $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ x\,\mathrm{T}y=2\Leftrightarrow x=2 \ \text{أو} \ y=2$

إذن : $\mathbb{Z}$ خالية من قواسم الصفر، ومنه فإن $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة كاملة.

جـ- العنصر 4 من $\mathbb{Z}\setminus\{2\}$ لايقبل مماثلا بالنسبة للقانون T في $\mathbb{Z}\setminus\{2\}$، فلو افترضنا وجود مماثل y ل 4 في $(\mathbb{Z}\setminus\{2\},\mathrm{T})$

لكان : $y\,\mathrm{T}4=3\Rightarrow(y-2)(4-2)+2=3\Rightarrow2(y-2)=1$، ومنه فإن 1 عدد زوجي (لكون $y-2\in\mathbb{Z}$)

وهذا تناقض، وبالتالي فإن $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ ليس جسما.

التمرين 2 :

I. ليكن a عددا عقديا غير منعدم. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E):\quad 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$$

1. حساب مميز المعادلة (E):

$$\Delta=\left(-\left(3+i\sqrt{3}\right)a\right)^2-4\times2\times\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2$$

$$\Delta=\left(9+6i\sqrt{3}-3-8-8i\sqrt{3}\right)a^2=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)a^2=\left(1-2\times1\times i\sqrt{3}-3\right)a^2=\left(1-i\sqrt{3}\right)^2a^2$$

$$\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$$

2. نعلم أن مميز المعادلة (E) ، $\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2\neq0$ (لأن $a\in\mathbb{C}^*$) ، ومنه نستنتج أن للمعادلة (E) حلين مختلفين هما

$$z_1=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a+\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=e^{i\frac{\pi}{3}}a$$

و $z_2=\dfrac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a-\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=a$ وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\left\{ a\ ,\ e^{i\frac{\pi}{3}}a \right\}$.

II. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O\ ,\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right)$. نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي a و $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و z. ليكن $r=R\left(M\ ,\frac{\pi}{3}\right)$ الدوران الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1=r^{-1}(A)$ و $B_1=r(B)$ حيث : $r^{-1}=R\left(M\ ,-\frac{\pi}{3}\right)$ هو الدوران العكسي للدوران r، مركزه M وزاويته $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

1. لدينا : $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، إذن : $\left|\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right|=1$ و $Arg\left(\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

ومنه فإن : $OA=OB$ و $\left(\overrightarrow{OA}\ ,\overrightarrow{OB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

وبالتالي فإن OAB مثلث متساوي الأضلاع.

2. أ- لدينا :

$$\begin{aligned}
A_1=R^{-1}\left(M\ ,\frac{\pi}{3}\right)(A) &\Leftrightarrow A_1=R\left(M\ ,-\frac{\pi}{3}\right)(A)\\
&\Leftrightarrow MA=MA_1 \quad\wedge\quad \overline{\left(\overrightarrow{MA}\ ,\overrightarrow{MA_1}\right)}\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow \left|z_A-z_M\right|=\left|z_{A_1}-z_M\right| \quad\wedge\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_{A_1}-z_M}{z_A-z_M}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow \left|\frac{z_{A_1}-z_M}{z_A-z_M}\right|=1 \quad\wedge\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_{A_1}-z_M}{z_A-z_M}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow \frac{z_{A_1}-z_M}{z_A-z_M}=e^{-i\frac{\pi}{3}}\\
&\Leftrightarrow z_{A_1}=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A+\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)z\\
&\Leftrightarrow a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(1-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)z\\
&\Leftrightarrow \boxed{a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}
\end{aligned}$$

$$B_1=R\left(M,\frac{\pi}{3}\right)(B)\Leftrightarrow z_{B_1}-z_M=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B-z_M\right)$$

$$\Leftrightarrow b_1-z=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(b-z\right)$$

$$\Leftrightarrow b_1=e^{i\frac{\pi}{3}}b+\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z$$

$$\Leftrightarrow b_1=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b+\left(1-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)z$$

$$\Leftrightarrow b_1=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z}$$

ب- لدينا :

$$z_{\overrightarrow{B_1M}}=z_M-z_{B_1}=z-b_1=z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$z_{\overrightarrow{B_1M}}=a_1=z_{A_1}-z_O=z_{\overrightarrow{OA1}}$$

ومنه فإن : $z_{\overrightarrow{B_1M}}=z_{\overrightarrow{OA1}}$ ، أي : $\overrightarrow{OA1}=\overrightarrow{B_1M}$. وبالتالي فإن OA_1MB_1 متوازي الأضلاع.

3. نفترض أن : $M\neq A$ و $M\neq B$ أي : $z\neq a$ و $z\neq b$.

أ- حسب السؤال 2.أ ، لدينا : $z-b_1=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z-b\right)$ و $z-a_1=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z-a\right)$ ونعلم أن : $b=e^{i\frac{\pi}{3}}a$، إذن :

$$\frac{z-b_1}{z-a_1}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z-b\right)}{e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z-a\right)}=e^{i\frac{2\pi}{3}}\frac{z-b}{z-a}=e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}\frac{z-b}{z-a}=-\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\frac{z-b}{z-a}=-\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}.$$

ب- من 3.أ- نستنتج أن : M و A_1 و B_1 نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \frac{z_M-z_{B_1}}{z_M-z_{A_1}}\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\frac{z-b_1}{z-a_1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow-\frac{z-b}{a-b}\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z-b}{a-b}\div\frac{0-b}{0-a}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z_M-z_B}{z_A-z_B}\div\frac{z_O-z_B}{z_O-z_A}\in\mathbb{R}$$

ولدينا : $\frac{z_O - z_B}{z_O - z_A} = \frac{b}{a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$ ، إذن : O و A و B نقط غير مستقيمية. ومنه فإن :

M و O و A و B نقط متداورة $\Leftrightarrow$ M و A_1 و B_1 نقط مستقيمية

التمرين 3 :

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 والتي تحقق الخاصية : $(R):\ 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$.

1. نفترض أن : $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ و $(R):\ 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$ وليكن p **أصغر قاسم أولي موجب** للعدد n.

أ- p يقسم n ، إذن يوجد على الأقل $q \in \mathbb{Z}$ بحيث $n = pq$، ولدينا : $3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$ ، إذن : يوجد على الأقل $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $3^n - 2^n = kn = kpq = tp$ و $t = kq \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$.

نفترض أن : $p = 2$. إذن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [2]$ ومنه فإن : $3^n \equiv 0\ [2]$.

ولدينا : $3 \equiv 1\ [2] \Rightarrow 3^n \equiv 1\ [2]$ إذن : $1 \equiv 0\ [2]$ وهذا تناقض ، إذن : $p \neq 2$.

نفترض أن $p = 3$. إذن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [3]$ ومنه فإن : $2^n \equiv 0\ [3]$.

ولدينا : $2 \equiv -1\ [3] \Rightarrow 2^n \equiv (-1)^n\ [3] \Rightarrow 2^n \equiv \pm 1\ [3]$. إذن : $0 \equiv \pm 1\ [3]$ وهذا تناقض ،
إذن : $p \neq 3$.

وبما أن p أولي ، فإن : $p \geq 5$.

ب- p و 2 عددان أوليان مختلفان (لكون $p \geq 5$) ، إذن : $p \wedge 2 = 1$ وبالمثل p و 3 عددان أوليان مختلفان (لكون $p \geq 5$) ،
إذن : $p \wedge 3 = 1$ وبما أن p عدد أولي ، فإنه حسب مبرهنة فيرما الصغرى ، لدينا :
$2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

جـ- نضع : $d = n \wedge (p-1)$. إذن : $d \in \mathbb{N}^*$ و d / n و $d / (p-1)$. نفترض أن : $d \neq 1$.

إذا كان d أوليا ، فإن d قاسم أولي للعدد n و $d \leq p - 1$ وهذا لا يمكن لأن p **أصغر قاسم أولي** للعدد n.

إذا كان d غير أولي ، فإن أصغر قاسم فعلي q للعدد d هو عدد أولي ولدينا q / d و d / n ، إذن q / n و
$q \leq d \leq p - 1 < p$ ، ومنه فإن : q قاسم أولي للعدد n و $q < p$ وهذا لا يمكن لأن p **أصغر قاسم أولي** للعدد n.

وعليه فإن : $d = 1$. أي : $n \wedge (p-1) = 1$.

حسب مبرهنة بوزو ، لدينا : $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ \ un + v\ (p-1) = 1$. نضع : $a = u$ و $b = -v$.

إذن : $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ و $an-b(p-1)=1$.

د- ليكن r و q باقي وخارج القسمة الأقليدية للعدد a على $p-1$: $a=q(p-1)+r$ حيث $0\leq r<p-1$ و $q\in\mathbb{Z}$.

نفترض أن $r=0$. إذن :

$$\begin{aligned} r=0 &\Rightarrow a=q(p-1)\\ &\Rightarrow an=q(p-1)n\\ &\Rightarrow 1+b(p-1)=q(p-1)n\\ &\Rightarrow 1=(p-1)(qn-b)\\ &\Rightarrow (p-1)/1\\ &\Rightarrow p-1=1\\ &\Rightarrow p=2 \end{aligned}$$

وبما أن $p\geq 5$ فإن $r\neq 0$. إذن : $1\leq r<p-1$.

$$\begin{aligned} a=q(p-1)+r &\Rightarrow an=qn(p-1)+rn\\ &\Rightarrow 1+b(p-1)=qn(p-1)+rn\\ &\Rightarrow 1+(p-1)(b-qn)=rn\\ &\Rightarrow 1+K(p-1)=rn \end{aligned}$$

حيث : $K=b-qn$. نفترض أن : $K\in\mathbb{Z}^-$. إذن :

$$\begin{aligned} K\leq 0 &\Rightarrow b\leq qn\\ &\Rightarrow 1+b(p-1)\leq 1+qn(p-1)\\ &\Rightarrow an\leq 1+qn(p-1)\\ &\Rightarrow n\left[a-q(p-1)\right]\leq 1\\ &\Rightarrow 0<nr\leq 1\\ &\Rightarrow nr=1\\ &\Rightarrow n=r=1 \end{aligned}$$

لأن $(n,r)\in\mathbb{N}^2$. وهدا تناقض مع كون $n>1$. ومنه فإن : $\boxed{K\in\mathbb{N}^*}$ و $\boxed{nr=1+K(p-1)}$.

2. نفترض أنه يوجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $n>1$ و يحقق العلاقة $(R):\ 3^n-2^n \equiv 0\ [n]$.

نعتبر p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n. (إما أن يكون n أوليا فنأخذ $p=n$ وإما يكون n غير أولي فنأخذ p أصغر قاسم فعلي للعدد n وهو عدد أولي قاسم ل n).

حسب السؤال 1. ب- ، لدينا : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$. إذن :

$$\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1\ [p] \\ 3^{p-1} \equiv 1\ [p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{K(p-1)} \equiv 1\ [p] \\ 3^{K(p-1)} \equiv 1\ [p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{1+K(p-1)} \equiv 2\ [p] \\ 3^{1+K(p-1)} \equiv 3\ [p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{rn} \equiv 2\ [p] \\ 3^{rn} \equiv 3\ [p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{rn}-2^{rn} \equiv 1\ [p]$$

ولدينا :

$$3^n-2^n \equiv 0\ [p] \Rightarrow 3^n \equiv 2^n\ [p]$$

$$\Rightarrow 3^{rn} \equiv 2^{rn}\ [p]$$

$$\Rightarrow 3^{rn}-2^{rn} \equiv 0\ [p]$$

ومنه نستنتج أن : $1 \equiv 0\ [p]$. إذن : p يقسم 1 ومنه $p=1$. و هذا تناقض.

وبالتالي فإنه لايوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 يحقق العلاقة $(R):\ 3^n-2^n \equiv 0\ [n]$.

مسألة :

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $\left[1,+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x} & , x>1 \\ h(1)=1 \end{cases}$$

الجزء الأول :

1. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x-1}}=1=h(1)$ لأن : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$. إذن : h متصلة على اليمين في 1.

ب- لكل $x>0$، نضع : $\varphi(x)=\ln x-x+1$.

ليكن $x>0$ ، لدينا : $\varphi'(x)=\left(\ln x-x+1\right)'=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$ و $x>1\Rightarrow\dfrac{1-x}{x}<0\Rightarrow\varphi'(x)<0$

إذن : φ تناقصية قطعا على $\left[1,+\infty\right[$ ومنه فإن :

$x>1\Rightarrow\varphi(x)<\varphi(1)\Rightarrow\ln x-x+1<0\Rightarrow\ln x<x-1$. إذن : $\forall x>1,\ \ln x<x-1$.

ليكن $x>1$، لدينا :

$$h'(x)=\left(\frac{x-1}{x\ln x}\right)'$$

$$h'(x)=\frac{(x-1)'x\ln x-(x-1)(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}$$

$$h'(x)=\frac{x\ln x-(x-1)(1+\ln x)}{(x\ln x)^2}$$

$$h'(x)=\frac{\ln x-x+1}{(x\ln x)^2}<0$$

ومنه نستنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $\left]1,+\infty\right[$.

2. أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x\ln x}=0$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$1 \searrow 0$

ب- $x \mapsto x$ و $x \mapsto x-1$ دالتان حدوديتان فهما متصلتان على $\mathbb{R}$ وخصوصا على المجال $]1,+\infty[$ ولدينا $x \mapsto \ln x$ دالة متصلة على $\mathbb{R}_+^*$ وخصوصا على $]1,+\infty[$. إذن : $x \mapsto x\ln x$ متصلة على $]1,+\infty[$ (جداء دالتين متصلتين) وبما أن : $\forall x \in]1,+\infty[, \quad x\ln x \neq 0$ ، فإن h متصلة على $]1,+\infty[$ (خارج دالتين متصلتين)

ولدينا h متصلة على اليمين في 1. إذن : h متصلة على المجال $[1,+\infty[$.

ولدينا h تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$. إذن : $h\left(\left[1,+\infty\right[\right) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x), h(1)\right] =]0,1]$ ،

ومنه نستنتج أن : $\forall x \in [1,+\infty[, \quad 0 < h(x) \leq 1$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,dt \quad , \quad x > 1 \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g في معل متعامد ممنظم $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. أ- ليكن $x > 1$. لدينا :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \int_x^{x^2} \frac{(\ln t)'}{\ln t}dt = \Big[\ln|\ln t|\Big]_x^{x^2} = \ln|\ln x^2| - \ln|\ln x|$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2|\ln x| - \ln|\ln x| = \ln\left(\frac{2|\ln x|}{|\ln x|}\right) = \ln(2)$$

ب- - ليكن $x > 1$. لدينا :

$$g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\,\ln t}dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t} - \frac{1}{t\,\ln t}dt = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}\,\ln t}dt$$

جـ- ليكن $x>1$ ، نضع $u=\sqrt{t}$ ، إذن : $t=x \Leftrightarrow u=\sqrt{x}$ و $t=x^2 \Leftrightarrow u=x$ و $du=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2u}dt$

ومنه نجد : $dt=2udu$. إذن :

$$g(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}\ln t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{u-1}{u\ln\left(u^2\right)}\ 2u\ du=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{u-1}{\ln(u)}\ du=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{\ln(t)}\ dt$$

.2 أ- ليكن $x>1$ وليكن $\sqrt{x}\le t\le x$. لدينا : $g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{\ln(t)}\ dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}h(t)\ dt$.

بما أن h تناقصية قطعا على $\left]1,+\infty\right[$ ، فإن :

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\le t\le x &\Rightarrow h(x)\le h(t)\le h\left(\sqrt{x}\right)\\ &\Rightarrow h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h(t)dt\le h\left(\sqrt{x}\right)\int_{\sqrt{x}}^{x}dt\\ &\Rightarrow \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)\end{aligned}$$

ب- ليكن $x>1$ ، لدينا $x-1>0$. إذن :

$$\begin{aligned}\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right) &\Rightarrow \frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)}{x-1}\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)}{x-1}\\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(x)\le\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\le\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h\left(\sqrt{x}\right)\end{aligned}$$

ولدينا : $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(x)=\frac{1}{2}h(1)=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}h(1)=\frac{1}{2}$.

إذن : $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h\left(\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(x)=\frac{1}{2}$ وحسب قوانين الترتيب والنهايات ، لدينا :

$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$ ومنه فإن g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 ولدينا : $g'_d(1)=\frac{1}{2}$.

جـ- لدينا :

$$\forall x>1,\quad g(x)\ge\ln 2+\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\Rightarrow\forall x>1,\quad g(x)\ge\ln 2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln}$$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}\ln 2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln}=+\infty$ ، فإن : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

ولدينا : $\forall x>1,\quad \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2\le \left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

إذن : $\forall x>1,\quad \frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\ln x}\le\frac{g(x)}{x}\le\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\frac{2}{\ln(x)}$

وبما ان : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\ln x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\frac{2}{\ln(x)}=0$

فإنه حسب قواعد الترتيب والنهايات ، لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$.

3. أ- $t\mapsto\sqrt{t}$ دالة متصلة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ وخصوصا على $\left]0,+\infty\right[$ و $t\mapsto\ln t$ دالة متصلة على المجال $\left]0,+\infty\right[$.

إذن : $t\mapsto\sqrt{t}\ln t$ متصلة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ (جداء دالتين متصلتين) ولدينا : $\forall t\in\left]0,+\infty\right[,\ \sqrt{t}\ln t\neq 0$.

إذن : $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ متصلة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ فهي تقبل دالة أصلية ψ على المجال $\left]0,+\infty\right[$.

لكل $x>1$ ، لدينا : $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt=\left[\psi(t)\right]_x^{x^2}=\psi\left(x^2\right)-\psi(x)$.

ψ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $\left]1,+\infty\right[$ و $u:x\mapsto x^2$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (دالة حدودية) وخصوصا على المجال $\left]1,+\infty\right[$ و $u\left(\left]1,+\infty\right[\right)\subset\left]1,+\infty\right[$ لأن : $\forall x\in\mathbb{R},\ x>1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow u(x)>1$

إذن : $x\mapsto\psi\left(x^2\right)$ قابلة للاشتقاق على $\left]1,+\infty\right[$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق) . ومنه فإن g قابلة للاشتقاق على $\left]1,+\infty\right[$

ليكن $x>1$ ، لدينا :

$$g'(x)=\left(\psi\left(x^2\right)-\psi(x)\right)'=2x\,\psi'\left(x^2\right)-\psi'(x)$$

$$g'(x)=2x\frac{1}{\sqrt{x^2}\ln\left(x^2\right)}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)}=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$$

ب- ليكن $x>1$ ، لدينا : $g'(x)=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$ ونعلم أن : $\forall t\in\left[1,+\infty\right[,\quad 0<h(t)\le 1$.

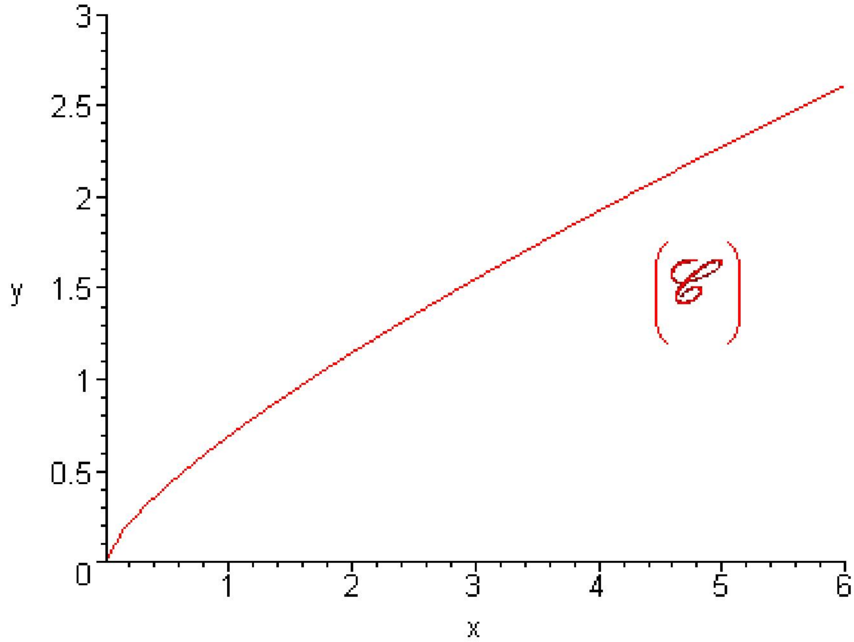
إذن : $0<h\left(\sqrt{x}\right)\le 1\ \Rightarrow\ 0<\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)\le\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 0<g'(x)\le\frac{1}{2}$

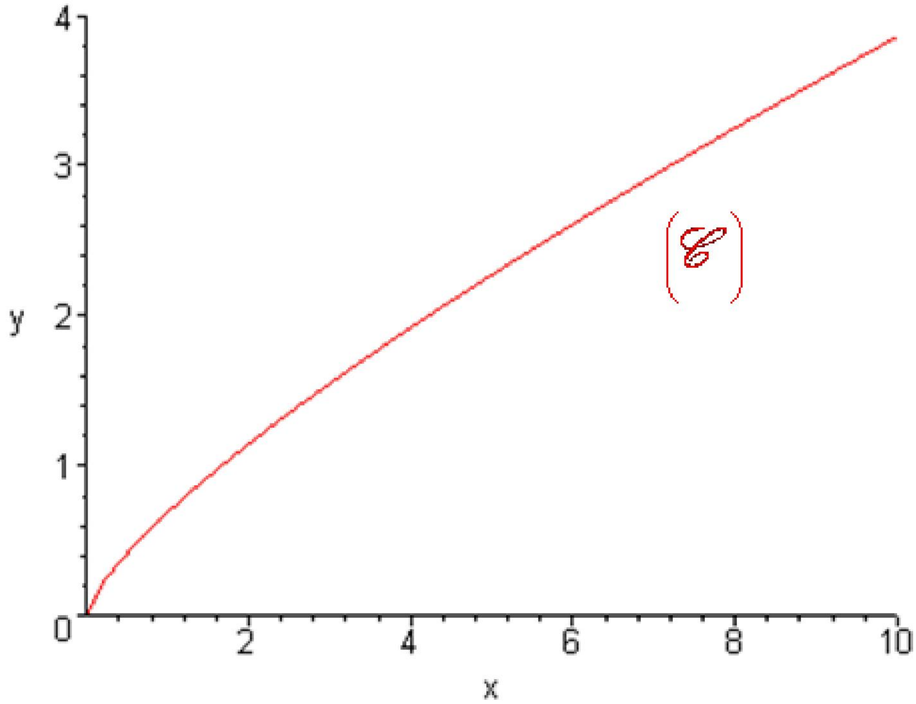
ومنه فإن : $\boxed{\forall x>1,\ 0<g'(x)\le\frac{1}{2}}$

جدول تغيرات الدالة g :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\frac{1}{2}$ $+$	
$g(x)$	$\ln 2 \nearrow$	$+\infty$

جـ إنشاء المنحنى $\left(\mathscr{C}\right)$:





الجزء الثالث :

I. 1. لكل $x \geq 1$ ، نضع $K(x)=g(x)-x+1$.

لدينا g دالة متصلة على المجال $[1,+\infty[$ و $x \mapsto -x+1$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ (دالة حدودية) وخصوصا على $[1,+\infty[$.

إذن : K متصلة على المجال $[1,+\infty[$.

ولدينا : $\forall x \in]1,+\infty[, \quad K'(x)=g'(x)-1 \leq \frac{1}{2}-1<0$. إذن: K تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$.

ومنه فإن K تقابل من $[1,+\infty[$ نحو المجال: $K([1,+\infty[)=]\lim_{x\to+\infty} K(x),K(1)]=]-\infty,\ln 2]$ ، لأن :

$\lim_{x\to+\infty} K(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)-x+1=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)+1=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$.

و $K(1)=g(1)-1+1=\ln 2$.

2. بما أن K تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $]-\infty,\ln 2]$ و $0 \in]-\infty,\ln 2]$ ، فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[1,+\infty[$ بحيث $K(\alpha)=0$. ولدينا: $K(\alpha)=0 \Leftrightarrow g(\alpha)-\alpha+1=0 \Leftrightarrow g(\alpha)+1=\alpha$.

إذن : $\boxed{\exists! \alpha \in [1,+\infty[, \quad g(\alpha)+1=\alpha}$.

II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} 1 \leq u_0 < \alpha \\ u_{n+1}=1+g(u_n) \quad , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1. أ- من أجل $n=0$ ، لدينا : $1 \leq u_0 < \alpha$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن $1 \leq u_n < \alpha$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} < \alpha$. لدينا : g تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$. إذن :

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n < \alpha &\Rightarrow g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha) \\ &\Rightarrow 1+g(1) \leq 1+g(u_n) < 1+g(\alpha) \\ &\Rightarrow 1+\ln 2 \leq u_{n+1} < \alpha \\ &\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha \end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n < \alpha}$.

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$، لدينا : $u_{n+1}-u_n=1+g(u_n)-u_n=K(u_n)$ ونعلم أن K تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

إذن : $u_{n+1}-u_n>0 \Rightarrow K(u_n)>0 \Rightarrow K(u_n)>K(\alpha) \Rightarrow 1\le u_n<\alpha$.

ومنه فإن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية تزايدية .

جـ- بما أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية تزايدية و مكبورة بالعدد α ($\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<\alpha$)، فإنها متقاربة. لنحدد نهايتها :

نضع : $H(x)=1+g(x)=K(x)+x$ لكل $x\ge1$. لدينا : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=H(u_n)$.

✓ H دالة متصلة على المجال $[1,\alpha[$ (مجموع دالتين متصلتين K و $x\mapsto x$).

✓ $H([1,\alpha[)\subset[1,\alpha[$:

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ 1\le x<\alpha &\Rightarrow g(1)\le g(x)<g(\alpha)\\ &\Rightarrow 1+\ln2\le 1+g(x)<1+g(\alpha)\\ &\Rightarrow 1+\ln2\le K(x)+x<\alpha\\ &\Rightarrow 1\le H(x)<\alpha\end{aligned}$$

✓ $u_0\in[1,\alpha[$. إذن : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[1,\alpha[$.

✓ $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية متقاربة لتكن l نهايتها.

حسب مصاديق التقارب، لدينا : $H(l)=l$ و $l\in[1,\alpha]$. ومنه فإن :

$$H(l)=l \Leftrightarrow K(l)+l=l \Leftrightarrow K(l)=0 \Leftrightarrow l=\alpha$$

(لأن α هو الحل الوحيد للمعادلة $K(x)=0$ على المجال $[1,+\infty[$) ولدينا $\alpha\in[1,\alpha]$.

وبالتالي فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

2. أ- H دالة متصلة على المجال $[1,\alpha]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]1,\alpha[$ (مجموع دالتين K و $x\mapsto x$ قابلتين للاشتقاق على المجال $]1,\alpha[$) ولدينا : $\forall x\in]1,\alpha[,\ |H'(x)|=|g'(x)|=g'(x)\le\frac{1}{2}$

(تذكير : $H(x)=x+K(x)=1+g(x)$)

حسب متفاوتة التزايدات المنتهية، لدينا : $\forall(x,y)\in[1,\alpha]^2,\ |H(x)-H(y)|\le\frac{1}{2}|x-y|$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، لدينا : $u_n\in[1,\alpha]$ و $\alpha\in[1,\alpha]$ ، إذن : $|H(u_n)-H(\alpha)|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

وعليه فإن : $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$. وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|}$.

ب- نبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

✓ من أجل $n=0$ ، لدينا $|u_0-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha|$ متفاوتة بديهية.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$، نفترض أن $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$ ونبين أن : $|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$

لدينا : $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha| \Rightarrow \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$

ولدينا : $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

إذن : $|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$

✓ خلاصة: $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$.

جـ- نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$ ، ولدينا : $-1<\frac{1}{2}<1$ ، إذن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

ومنه فإن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|=0$. حسب مصاديق التقارب، لدينا :

$(u_n)_{n\ge 0}$ متتالية متقاربة نهايتها : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

انتهى حل الموضوع

```
> f:=x->int(1/(sqrt(t)*ln(t)),t=x..x^2);
```

$$f := x \to \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln(t)}\,dt$$

```
> f(x);
```

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln(t)}\,dt$$

```
> with(plots):   Warning, the name changecoords has been redefined
> plot(f(x),x=0..6,y=0..3);
```

With Maple 7