الأستاذ : محمد الحيـــــان	تصحيح الامتحان الوطنـــي الموحد للبكالوريـــا الدورة العاديــة 2009	الثانيـــة بكالوريـــا علـــوم رياضيــة

التمرين الأول : (3 نقط)

✓ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية

✓ $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

✓ $$F=\left\{ M(x,y)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix} \text{ مع } (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R} \right\}$$

1. أ- لنبين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

لتكن $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\0&\frac{1}{a}\end{pmatrix}$ و $M(c,d)=\begin{pmatrix}c&d\\0&\frac{1}{c}\end{pmatrix}$ مصفوفتان من F حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ و $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. لدينا :

$$M(a,b)\times M(c,d)=\begin{pmatrix}a&b\\0&\frac{1}{a}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c&d\\0&\frac{1}{c}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}ac&ad+\frac{b}{c}\\0&\frac{1}{ac}\end{pmatrix}$$

$$=M\left(ac,ad+\frac{b}{c}\right)$$

مع : $\left(ac,ad+\frac{b}{c}\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. إذن : $M(a,b)\times M(c,d)=M\left(ac,ad+\frac{b}{c}\right)\in F$.

وبالتالي فإن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

1. ب- لدينا :

✓ $F\neq\varnothing$ ، لأن $I=M(1,0)\in F$.

✓ $F\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

✓ $\times$ قانون تركيب داخلي في F.

✓ $\times$ قانون تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$، إذن $\times$ قانون تجميعي في F.

✓ I هو العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $I=M(1,0)\in F$، إذن I هو العنصر المحايد لـ $\times$ في F.

✓ لكل عنصر $M(a,b)$ من F مماثل وحيد في F : $M^{-1}(a,b)=M\left(\frac{1}{a},-b\right)\in F$ مع

$.\left(\frac{1}{a},-b\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

✓ $M\left(3,4\right)\times M\left(1,2\right)=M\left(3,\frac{14}{3}\right)$ و $M\left(1,2\right)\times M\left(3,4\right)=M\left(3,10\right)$. إذن :

$.\ M\left(3,4\right)\times M\left(1,2\right)\neq M\left(1,2\right)\times M\left(3,4\right)$

وبالتالي فإن : $\left(F,\times\right)$ زمرة غير تبادلية.

2. لتكن المجموعة : $G=\left\{M\left(x,0\right)\in F\ /\ x\in\mathbb{R}^*\right\}$. لدينا :

✓ $G\neq\varnothing$ ، لأن : $I=M\left(1,0\right)\in G$.

✓ $G\subset F$.

✓ ليكن $M\left(a,0\right)$ و $M\left(b,0\right)$ عنصران من G ، حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}^*$. لدينا :

$M\left(a,0\right)\times M^{-1}\left(b,0\right)=M\left(a,0\right)\times M\left(\frac{1}{b},0\right)=M\left(\frac{a}{b},0\right)\in G$ ، مع $\frac{a}{b}\in\mathbb{R}^*$.

إذن $\left(G,\times\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(F,\times\right)$.

3. ليكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$\forall\left(x,y\right)\in E\ ,\ \forall\left(a,b\right)\in E\ ,\ \left(x,y\right)\perp\left(a,b\right)=\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right).$$

ونعتبر التطبيق :

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & \left(F,\times\right) & \rightarrow & \left(E,\perp\right)\\ & M\left(x,y\right) & \mapsto & \varphi\left(M\left(x,y\right)\right)=\left(x,y\right)\end{array}$$

أ- لدينا : $\left(1,1\right)\perp\left(2,3\right)=\left(2,\frac{7}{2}\right)$ و $\left(2,3\right)\perp\left(1,1\right)=\left(2,5\right)$.

ب- لتكن $M\left(a,b\right)$ و $M\left(c,d\right)$ مصفوفتان من F حيث $\left(a,b\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ و $\left(c,d\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi\left(M\left(a,b\right)\times M\left(c,d\right)\right)&=\varphi\left(M\left(ac,ad+\frac{b}{c}\right)\right)=\left(ac,ad+\frac{b}{c}\right)=\left(a,b\right)\perp\left(c,d\right)\\&=\varphi\left(M\left(a,b\right)\right)\times\varphi\left(M\left(c,d\right)\right)\end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $\left(F,\times\right)$ نحو $\left(E,\perp\right)$.

ليكن $\left(x,y\right)$ عنصرا من E. نحل في F المعادلة $\varphi\left(M\right)=\left(x,y\right)$.

لدينا $M\in F$ إذن $\exists\left(a,b\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\ /\ M=M\left(a,b\right)$. ومنه فإن :

$$\begin{aligned}\varphi\left(M\right)=\left(x,y\right)&\Leftrightarrow\ \varphi\left(M\left(a,b\right)\right)=\left(x,y\right)\\&\Leftrightarrow\ \left(a,b\right)=\left(x,y\right)\\&\Leftrightarrow\ \begin{cases}a=x\\b=y\end{cases}\end{aligned}$$

إذن : $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\ \exists!M\left(a,b\right)\in F\ /\ \varphi\left(M\left(a,b\right)\right)=\left(x,y\right)$.

وبالتالي فإن φ تقابل من F نحو E.

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(F,\times)$ نحو $(E,\perp)$.

جـ- بما أن φ تشاكل تقابلي من $(F,\times)$ نحو $(E,\perp)$، و أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية ، فإن $(E,\perp)$ زمرة غير تبادلية.

التمرين الثاني : (4 نقط)

لدينا : $m \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $(E)\ :\ z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$.

1. أ- مميز المعادلة (E) هو :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[-(1-i)(m+1)\right]^2+4i(m^2+1)\\ &=-2i(m+1)^2+4i(m^2+1)\\ &=2i\left[-(m+1)^2+2(m^2+1)\right]\\ &=2i(m-1)^2\\ \Delta&=\left[(1+i)(m-1)\right]^2\end{aligned}$$

ب- حلي المعادلة (E) هما :

$$z_1=\frac{(1-i)(m+1)-(1+i)(m-1)}{2}=1-mi \quad \text{و} \quad z_2=\frac{(1-i)(m+1)+(1+i)(m-1)}{2}=m-i.$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{\ m-i\ ,\ 1-mi\ \}$.

جـ- نضع $m=x+iy\ /\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$. حسب قاعدة جداء الجذرين ، لدينا :

$$z_1z_2=1\Leftrightarrow \frac{c}{a}=1\Leftrightarrow \frac{-i(m^2+1)}{1}=1\Leftrightarrow m^2=-1+i \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=\sqrt2\\ x^2-y^2=-1\\ 2xy=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\dfrac{\sqrt2-1}{2}\\ y^2=\dfrac{\sqrt2+1}{2}\\ xy=\dfrac12>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt2-1}{2}}\\ y=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt2+1}{2}}\\ xy=\dfrac12>0\end{cases}$$

وبالتالي فإن قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) هو 1 ، هما :

$$\sqrt{\frac{\sqrt2-1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt2+1}{2}} \quad \text{و} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt2-1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt2+1}{2}}$$

2. نضع : $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$ و $m=e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$. لدينا :

$$z_1=1-im=1+e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}=1+e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

وحيث أن : $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$ ، فإن : $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

وعليه ، فإن الشكل المثلثي للعدد العقدي z_1 هو : $\boxed{z_1=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}$

ولدينا :

$$z_2=m-i=e^{i\theta}-i=-i\left(1+ie^{i\theta}\right)=-i\left(1+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(1+e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right)$$

$$=e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

وحيث أن : $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$ ، فإن : $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)<0$.

وعليه ، فإن الشكل المثلثي للعدد العقدي z_2 هو :

$$z_2=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\pi}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=2\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}=\boxed{2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}}$$

II. المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. نعتبر النقط $M(m)$ و $M_1(z_1=1-im)$ و $M_2(z_2=m-i)$.

1. نضع : $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ / $m=x+iy$. تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية إذا وفقط إذا كان على التوالي :

$$\Leftrightarrow \frac{z_1-m}{z_2-m}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-im-m}{m-i-m}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-im-m}{-i}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow i+m-im\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow i+x+iy-i(x+iy)\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)+i(1+y-x)\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 1+y-x=0$$

وبالتالي فإن مجموعة النقط M التي من اجلها تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية هي المستقيم ذو المعادلة $1+y-x=0$ محروم من النقطة $A(1)$.

2.أ- ليكن R التحويل الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث : $z'=1-iz$.

لدينا : $a=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}\notin\mathbb{R}$ و $|a|=1$. إذن R دوران مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، حيث : $b=-i$ و

$\frac{b}{1-a}=\frac{1}{1-(-i)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. $R=R\left(\Omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right),-\frac{\pi}{2}\right)$.

ب- لدينا : $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}=\frac{m-i-(1-im)}{m-i-m}=\frac{(m-1)+i(-1+m)}{-i}=(m-1)(-1+i)=(1-m)(1-i)$.

$$\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (1-m)(1-i)\in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overline{(1-m)(1-i)}=-(1-m)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow (1-\overline{m})(1+i)=-(1-m)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow 1+i-\overline{m}-\overline{m}i=-1+i+m-mi$$

$$\Leftrightarrow m+\overline{m}-(m-\overline{m})i=2$$

$$\Leftrightarrow 2\Re e(m)+2\Im m(m)=2$$

$$\Leftrightarrow \Re e(m)+\Im m(m)=1$$

جـ- لدينا : $z_1=1-im$. إذن : $R\left(\Omega,-\frac{\pi}{2}\right)(M)=M_1$ ، ومنه فإن : ΩMM_1 مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في Ω .

هكذا تكون النقط Ω و M و M_1 متداورة وتنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}$ التي أحد أقطارها $[MM_1]$ ، وبالتالي تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة إذا وفقط إذا كان $M_2\in\mathscr{C}$ يكافئ على التوالي :

- MM_1M_2 مثلث قائم الزاوية في M_2 .
- $\left(\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right)\equiv\pm\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right)\equiv\pm\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
- $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in i\mathbb{R}$.
- $\boxed{\Re e(m)+\Im m(m)=1}$. حسب السؤال 2 – ب .

التمرين الثالث : (4 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $a_n=2^n+3^n+6^n-1$.

1. أ- لدينا : $2\equiv 0\,[2]$ و $6\equiv 0\,[2]$ و $3\equiv 1\,[2]$. إذن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $2^n\equiv 0\,[2]$ و $6^n\equiv 0\,[2]$ و $3^n\equiv 1\,[2]$. ومنه فإن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ a_n=2^n+3^n+6^n-1\equiv 1-1\,[2]\equiv 0\,[2]$.

خلاصة : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ a_n\equiv 0\,[2]$. أي أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، a_n عدد زوجي.

ب- ليكن n من $\mathbb{N}^*$. لدينا : $3\equiv 0\,[3]$ و $6\equiv 0\,[3]$. إذن : $3^n\equiv 0\,[3]$ و $6^n\equiv 0\,[3]$.

ولدينا : $2\equiv -1\,[3]$ ، إذن : $2^n\equiv(-1)^n\,[3]$. ومنه نستنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ a_n\equiv(-1)^n-1\,[3]$.

وأن : n زوجي $\Leftrightarrow (-1)^n\equiv 1\,[3] \Leftrightarrow (-1)^n-1\equiv 0\,[3] \Leftrightarrow a_n\equiv 0\,[3]$.

2. ليكن p عددا أوليا بحيث $p>3$.

أ- p أولي و $p>3$. إذن p و 2 و 3 أعداد أولية مختلفة فيما بينها مثنى مثنى ، فهي أولية فيما بينها مثنى مثنى. إذن :
$p\wedge 2=1$ و $p\wedge 3=1$ ، ومنه نستنتج أن : $p\wedge 6=1$ ، ($2\times 3=6$).
مبرهنة فيرما تؤكد على أن : $2^{p-1}\equiv 1\,[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1\,[p]$ و $6^{p-1}\equiv 1\,[p]$.

ب- لدينا : $6\,a_{p-2}=6\left(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\right)=3\times 2^{p-1}+2\times 3^{p-1}+6^{p-1}-6$. حسب السؤال 2- أ ، نجد أن :
$6\,a_{p-2}\equiv 0\,[p]$ ، إذن : $p\ /\ 6\,a_{p-2}$ ، وبما أن $p\wedge 6=1$ ، فإنه حسب مبرهنة كوص ، لدينا : $p\ /\ a_{p-2}$.

جـ- ليكن q عددا صحيحا طبيعيا أوليا.

- ✓ إذا كان $q=2$ ، فإنه حسب 1- أ، لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، a_n عدد زوجي ، إذن : $q\ /\ a_n$ ، ومنه فإن : $q\wedge a_n=q$.
- ✓ إذا كان $q=3$ ، فإنه حسب 1- ب ، لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $a_{2n}\equiv 0\,[3]$ ، إذن : $q\ /\ a_{2n}$ ، ومنه فإن $q\wedge a_{2n}=q$.
- ✓ إذا كان $q>3$ ، فإن $q\ /\ a_{q-2}$ ، ومنه فإن : $q\wedge a_{q-2}=q$.

خلاصة : يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n\wedge q=q$.

مسـألــــــــة : (10 نقط)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x)=x\,(1-\ln x)^n & , \quad x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول :

1. أ- نضع $x=t^n$ ، أي $\underset{x\to 0^+}{\to} 0^+$ $t=\sqrt[n]{x}$. إذن :

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x)=\lim_{x\to 0^+} x\,(1-\ln x)^n=\lim_{t\to 0^+}\left[t-n\,t\ln t\right]^n=0=f_n(0)$$

ومنه فإن f_n دالة متصلة على اليمين في الصفر.

ب- لدينا : $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x\,(1-\ln x)^n}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1-\ln x)^n=\boxed{+\infty}$ ، لأن : $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

إذن f_n غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

جـ- حساب نهايات : .

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty} x\,(1-\ln x)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x)=\lim_{x\to+\infty} x\,(1-\ln x)^2=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2=\boxed{+\infty}.$$

.2 أ- ليكن $x>0$ ، لدينا : $f_1'(x)=\left(x\left(1-\ln x\right)\right)'=x'\left(1-\ln x\right)+x\left(1-\ln x\right)'=-\ln x$. ومنه نستنتج تغيرات f_1.

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

ب- ليكن $x>0$، لدينا: $f_2'(x)=\left(x\left(1-\ln x\right)^2\right)'=x'\left(1-\ln x\right)^2+x\left(\left(1-\ln x\right)^2\right)'=\left(\ln x-1\right)\left(\ln x+1\right)$.

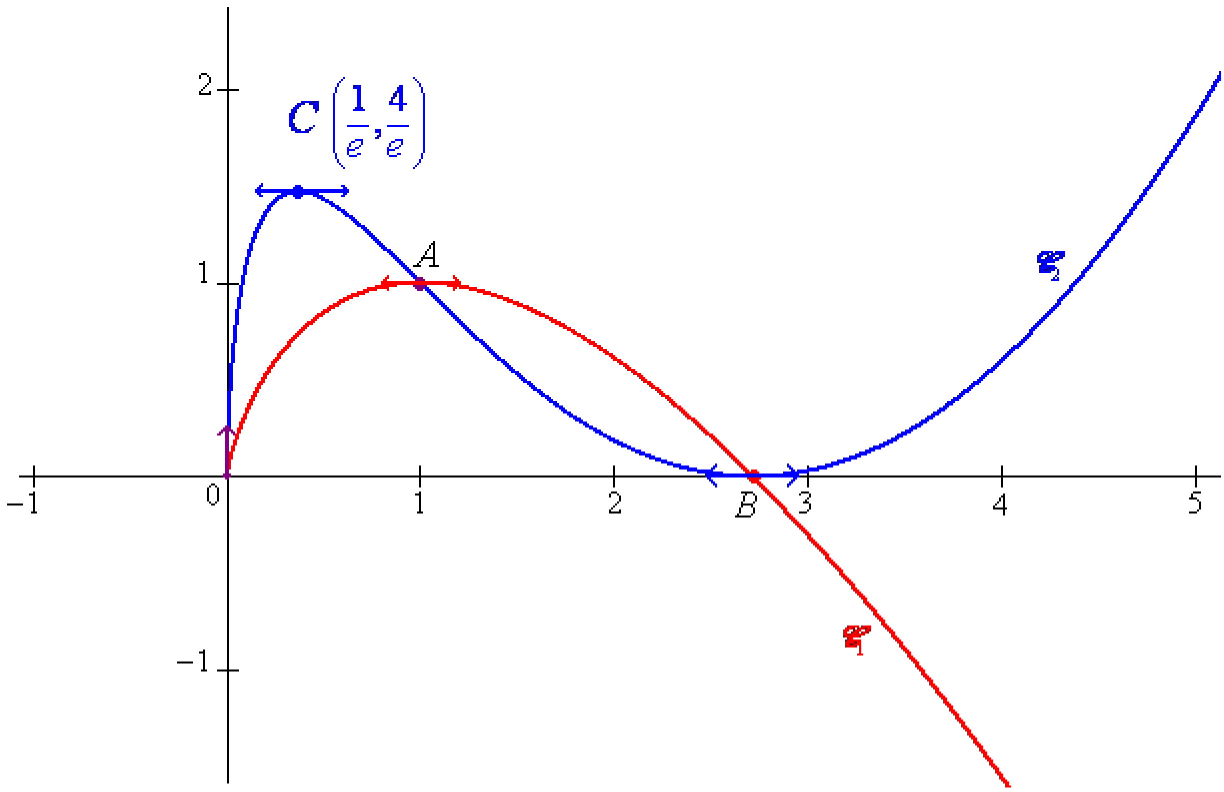
لدينا : $x=\dfrac{1}{e}$ أو $x=e \Leftrightarrow f_2'(x)=0$. نعطي جدول تغيرات الدالة f_2 كما يلي :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

.3 أ- ليكن $x>0$، لدينا: $f_2(x)-f_1(x)=x\left(1-\ln x\right)^2-x\left(1-\ln x\right)=x\ln x\left(\ln x-1\right)$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي ل $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$		$\mathcal{C}_2$ فوق $\mathcal{C}_1$	$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\mathcal{C}_2$ تحت $\mathcal{C}_1$	$B\begin{pmatrix}e\\0\end{pmatrix}$	$\mathcal{C}_2$ فوق $\mathcal{C}_1$	

ب- إنشاء المنحنيين : $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$:



الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}\,dt$.

1. أ- ليكن $x \in]-\infty,0[$. الدالة $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+t^2}$ دالة متصلة على المجال $[0,+\infty[$، إذن تقبل دالة أصلية ψ على المجال $[0,+\infty[$.

إذن : $\forall x \in]-\infty,0]\ ,\ F(x)=\left[\psi(t)\right]_{e^x}^{1} = \psi(1)-\psi(e^x)$.

لدينا : $u : x \mapsto e^x$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ و $\forall x \in]-\infty,0[\ ,\ u(x)=e^x>0$ و ψ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ، إذن $\psi\circ u : x \mapsto \psi(e^x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ ولدينا :

$$\forall x \in]-\infty,0[\ ,\ F'(x) = -\,e^x\psi'(e^x) = -\,e^x\frac{f_1(e^x)}{1+e^{2x}} = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

ب- إشارة $F'(x)$ على المجال $]-\infty,0[$ هي إشارة $x-1$ ، و لدينا : $\forall x \in]-\infty,0[\ ,\ x-1<0$. إذن F تناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

2. أ- ليكن $x<0$ و $t \in [e^x,1]$. لدينا : $e^x \le t \le 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+t^2} \le \frac{1}{1+e^{2x}}$. وبما أن : $f_1(t)>0$ ، فإن :

$\frac{1}{2}f_1(t) \le \frac{f_1(t)}{1+t^2} \le \frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)$ ، أي $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \le \int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt$ ،

وبالتالي فإن : $$\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \;\le\; F(t) \;\le\; \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$$

خلاصة : $$\forall x<0 \;:\; \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \;\le\; F(t) \;\le\; \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$$

ب- ليكن $x\in]0,+\infty[$ ، لدينا : $\left(x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\right)'=2x\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)+x^2\left(-\frac{1}{2x}\right)=\frac{3}{2}x-x\ln x-\frac{1}{2}x$

$$=x-x\ln x=x(1-\ln x)=f_1(x)$$

ومنه فإن $x\mapsto x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$.

جـ- لدينا : $\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\left[t^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln t}{2}\right)\right]_{e^x}^{1}=\frac{3}{4}-e^{2x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{x}{2}e^{2x}$.

إذن : $\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{x}{2}e^{2x}=\boxed{\frac{3}{4}}$ ، لأن : $\lim_{x\to-\infty}xe^{2x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0$.

3. نفترض أن : $\lim_{x\to-\infty}F(x)=l\in\mathbb{R}$.

نعلم أن : $\forall x<0\ :\ \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\le F(t)\le\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)\,dt$

وأن : $\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0$.

إذن : $\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}$.

الجزء الثالث :

نضع : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ u_n=\int_1^e f_n(x)dx$.

1. أ- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و $x\in[1,e]$. لدينا : $1\le x\le e\Rightarrow0\le\ln x\le1\Rightarrow1-\ln x\ge0$.

إذن: $f_n(x)=x(1-\ln x)^n\ge0$. ومنه فإن : $\forall x\in[1,e]\ :\ f_n(x)\ge0$. إذن : $u_n=\int_1^e f_n(x)dx\ \ge\ 0$.

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، وليكن $x\in[1,e]$. لدينا :

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=x(1-\ln x)^{n+1}-x(1-\ln x)^n=-x\ln x(1-\ln x)^n$$

بما أن : $1\le x\le e$ ، فإن $x\ge0$ و $\ln x\ge0$ و $1-\ln x\ge0$ ، إذن : $f_{n+1}(x)-f_n(x)\ \le\ 0$.

خلاصة : $\boxed{\forall x\in[1,e]\ :\ f_{n+1}(x)-f_n(x)\ \le\ 0}$.

جـ- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ولكل $x\in[1,e]$ ، لدينا : $f_{n+1}(x)-f_n(x)\le0\Rightarrow f_{n+1}(x)\le f_n(x)$. إذن :

$\int_1^e f_{n+1}(x)dx\ \le\ \int_1^e f_n(x)dx$. وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ u_{n+1}\le u_n}$.

د- بما أن $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية تناقصية و مصغورة ب 0 ، فإنها متقاربة.

2. أ- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالتين المعرفتين بما يلي : $u\ :\ x\mapsto\frac{x^2}{2}$ و $v\ :\ x\mapsto(1-\ln x)^{n+1}$. لدينا :

- ✓ u و v متصلتين على المجال $[1,e]$.
- ✓ u و v قابلتين للاشتقاق على المجال $[1,e]$.
- ✓ u' و v' متصلتين على المجال $[1,e]$.

باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نحصل على ما يلي :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_1^e x\left(1-\ln x\right)^{n+1}dx \\
&= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)'\left(1-\ln x\right)^{n+1}dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\left(1-\ln x\right)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}(n+1)\left(-\frac{1}{x}\right)\left(1-\ln x\right)^n dx \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}\int_1^e x\left(1-\ln x\right)^n dx \\
u_{n+1} &= -\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n
\end{aligned}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ و المستقيمين الذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$ هي :

$$\mathscr{A}=\int_1^e\left|f_2(x)-f_1(x)\right|dx=\int_1^e f_1(x)-f_2(x)dx=\int_1^e f_1(x)dx-\int_1^e f_2(x)dx=u_1-u_2$$

وحسب السؤال (2 . أ-) ، نعلم أن : $u_2=-\frac{1}{2}+u_1$. إذن : $u_1-u_2=\frac{1}{2}$.

وبالتالي فإن : $\boxed{2\ cm^2}=\left\|\vec{i}\right\|\left\|\vec{j}\right\|\times\frac{1}{2}=u.a.\ \frac{1}{2}=\mathscr{A}$.

3. أ- ليكن $n\geq 2$. حسب الأسئلة 1.أ- و 1.جـ- و 2.أ- ، لدينا :

$$\begin{aligned}
0\leq u_{n+1}\leq u_n \quad &\Rightarrow \quad 0\leq -\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n\leq u_n \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\leq\frac{n+1}{2}u_n \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2}\leq\left(1-\frac{n+1}{2}\right)u_n \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1}\leq u_n \quad \text{و} \quad u_n\leq\frac{1}{n-1} \\
&\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

ب- بما أن : $\forall n\geq 2 :\ \frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n-1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ ، فإنه حسب مصاديق التقارب ، لدينا : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}$.

ولدينا : $\forall n\geq 2 :\ \frac{n}{n+1}\leq nu_n\leq\frac{n}{n-1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1}=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ ، فإنه حسب مصاديق التقارب ، لدينا : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n=1}$.

4. ليكن a عددا حقيقيا مخالفا للعدد u_1. نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_1=a \\ v_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}v_n \quad ; \quad n\geq 1 \end{cases}$$

أ- ليكن $n\geq 1$ ، لدينا :

$$d_{n+1}=|v_{n+1}-u_{n+1}|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}v_n-\left(-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n\right)\right|=\frac{n+1}{2}|v_n-u_n|=\frac{n+1}{2}d_n$$

$$\begin{array}{rcl} d_n &=& \frac{n}{2}\cancel{d}_{n-1} \\ \cancel{d}_{n-1} &=& \frac{n-1}{2}\cancel{d}_{n-2} \\ & .... & \\ & .... & \Rightarrow \boxed{d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1} \\ \cancel{d}_3 &=& \frac{3}{2}\cancel{d}_2 \\ \cancel{d}_2 &=& \frac{2}{2}d_1 \end{array}$$

ونبين هذه العلاقة بالترجع.

ب- طريقة 1 :

نعلم أن : $d_{n+1}=\frac{n+1}{2}d_n$: $\forall n\geq 1$. ولدينا : $\frac{n+1}{2}\geq 2$: $\forall n\geq 3$. إذن : $\forall n\geq 3$: $d_{n+1}\ \geq\ 2d_n$.

أي : $\frac{d_{n+1}}{d_n}\ \geq\ 2$: $\forall n\geq 3$.ومنه فإن : $\frac{d_n}{\cancel{d}_{n-1}}\times\frac{\cancel{d}_{n-1}}{\cancel{d}_{n-2}}\times...\times\frac{\cancel{d}_5}{\cancel{d}_4}\times\frac{\cancel{d}_4}{d_3}\ \geq\ 2^{n-3}$: $\forall n\geq 3$.

إذن : $\frac{d_n}{d_3}\ \geq\ 2^{n-3}$: $\forall n\geq 3$. وبالتالي فإن : $d_n\geq\ 2^{n-3}d_3$: $\forall n\geq 3$. وبما أن $2\ >\ 1$ ، فإن :

$\lim\limits_{n\to+\infty}2^{n-3}d_3=+\infty$. وحسب مصاديق التقارب ، لدينا : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}d_n=+\infty}$.

طريقة 2 :

ليكن $n\geq 3$. لدينا : $d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ ولدينا :

$$\begin{array}{ccc} n & \geq & 3 \\ ... & ... & ... \\ 3 & \geq & 3 \\ 2 & \geq & 2 \\ 1 & \geq & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{n!\geq 3^{n-2}\times 2}$$

إذن : $d_n\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}d_1$. وبما أن : $\frac{3}{2}>1$ و $d_1>0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}d_1=+\infty$. وحسب مصاديق التقارب ، لدينا:

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}d_n=+\infty}$.

جـ- نفترض أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة. نعلم أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ، ولدينا : $d_n=|v_n-u_n|$. إذن $(d_n)_{n\geq 1}$ متقاربة. وهذا تناقض. وبالتالي فإن : $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متباعدة.