القدرات المنتظرة

- دراسة اتصال دالة في نقطة باستعمال حساب النهايات.
- دراسة اتصال دالة على مجال باستعمال خاصيات اتصال العمليات على الدوال المتصلة.
- تحديد صورة قطعة أو مجال (محدود أو غير محدود) بدالة متصلة و بدالة متصلة و رتيبة قطعا
- تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو إشارة بعض التعابير.
- استعمال طريقة التفرع الثنائي في تحديد قيم مقربة لحلول المعادلة $f(x)=\lambda$ أو لتأطير هذه الحلول.
- تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال لإثبات وحدانية حل المعادلة $f(x)=\lambda$
- تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية و مبرهنة الدالة التقابلية في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا.

الامتدادات

- دراسة الدوال العددية
- المتتاليات العددية
- الحساب التكاملي
- الإحصاء و الاحتمالات
- العلوم الفيزيائية

فقرات الدرس

- نهاية دالة عددية
- الاتصال في نقطة - الاتصال على مجال
- العمليات على الدوال المتصلة
- صورة مجال بدالة متصلة.
- اتصال مركب دالتين

I)- نهاية دالة عددية:(تذكير و إضافات)

1)- نهاية دالة عددية في نقطة

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 و $l\in\mathbb{R}$.

نقول إن نهاية الدالة f عند النقطة x_0 هي l إذا كان:

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon)$ ، و نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+x+1$.

❖ لنبين باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

أي لنبين أن : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x-1|<\alpha\Rightarrow|f(x)-3|<\varepsilon)$

ليكن $I=\left]1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}\right[=\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$ مجالا مركزه 1. $\left(\forall x\in I,|x-1|<\frac{1}{2}\right)$

لدينا: $\forall x\in I,|f(x)-3|=|x^2+x-2|=|x-1||x+2|$

و لدينا : $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}<x+2<\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow|x+2|<\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow\forall x\in I,|f(x)-3|<\frac{5}{2}|x-1|$$

ليكن $\varepsilon>0$.

لكي يكون $|f(x)-3|<\varepsilon$ يكفي أن يكون $\frac{5}{2}|x-1|<\varepsilon$ أي $|x-1|<\frac{2}{5}\varepsilon$.

نأخذ $\alpha=\inf\left(\frac{2}{5}\varepsilon,\frac{1}{2}\right)$ و نحصل على :

$$(\forall\varepsilon>0)\left(\exists\alpha=\frac{2}{5}\varepsilon>0\right)(\forall x\in D_f)\left(0<|x-1|<\alpha\Rightarrow\begin{cases}0<|x-1|<\frac{1}{2}\\0<|x-1|<\frac{2}{5}\varepsilon\end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow|f(x)-3|<\varepsilon$$

و منه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

ملاحظة

يمكن التعبير عن التعريف السابق كما يلي :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow\left(\forall\mathring{J}(l,\varepsilon)>0\right)\left(\exists\mathring{I}(x_0,\alpha)\right)/\ f\left(\mathring{I}\right)\subset\mathring{J}$ حيث:

$\mathring{J}=]l-\varepsilon,l+\varepsilon[-\{l\}$ و $\mathring{I}=]x_0-\alpha,x_0+\alpha[-\{\alpha\}$

خاصية

إذا كانت f دالة تقبل نهاية في نقطة فإن هذه النهاية و حيدة .

برهان

نفترض أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l'$ و ليكن $\varepsilon>0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Rightarrow (\exists\alpha_1>0)(\forall x\in D_f)\left(0<|x-x_0|<\alpha_1 \Rightarrow |f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$

و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l' \Rightarrow (\exists\alpha_2>0)(\forall x\in D_f)\left(0<|x-x_0|<\alpha_2 \Rightarrow |f(x)-l'|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$

نأخذ $\alpha=inf(\alpha_1,\alpha_2)$ و نحصل على :

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x)-l'|<\frac{\varepsilon}{2} \end{cases} (\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha=\alpha=inf(\alpha_1,\alpha_2)>0)(\forall x\in D_f)(0<|x-x_0|<\alpha)$$

و بما أن $|l-l'|=|l-f(x)+f(x)-l'|\le|f(x)-l|+|f(x)-l'|$

فإن $\forall\varepsilon>0, |l-l'|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ و منه $l=l'$.

2)- نهايات الدوال الاعتيادية

خاصية

لتكن P و Q دالتين حدوديتين و x_0 عددا حقيقيا.

- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ إذا كان $Q(x_0)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x=\sin x_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \tan x=\tan x_0$ إذا كان $x_0\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x=\cos x_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x}=\sqrt{x_0}$ إذا كان $x_0\ge 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

3)- العمليات على النهايات

خاصية

لتكن f و g دالتين تقبلان نهاية في x_0 بحيث: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l'$. لدين:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)=l+l'$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x)=ll'$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l}{l'}$ مع $l'\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{l'}$ مع $l'\neq 0$

II)- اتصال دالة عددية

1)- الاتصال في نقطة Continuité en un point

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I مركزه x_0 .
نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

ملاحظة

- f متصلة في x_0 يعني: $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$.
- إذا كانت f معرفة في x_0 و لا تقبل نهاية في x_0 أو نهايتها في x_0 غير منتهية ،نقول إن f منقطعة أو غير متصلة في النقطة x_0 .

أمثلة

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, x\neq 0\\ f(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

- بين أن الدالة f متصلة في الصفر.

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\tan 2x}{\sin 3x}, x\neq 0\\ g(0)=1\end{cases}$.

- أدرس اتصال الدالة g في الصفر

2)- الاتصال على اليمين و الاتصال على اليسار continuité à droite –à gauche

نشاط

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\begin{cases}x^3, x\geq 0\\ x+1, x<0\end{cases}$.

1)-أنشئ في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة f .
2)- أدرس اتصال الدالة f في الصفر.

تعريف

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من النوع $[x_0, x_0+\alpha[$ ، حيث $\alpha>0$.
نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 على اليمين ،إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.
- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من النوع $]x_0-\alpha, x_0[$ ، حيث $\alpha>0$.
نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 على اليسار ،إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$.

بين أن الدالة f متصلة في الصفر.

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و $x_0 \in I$.
تكون الدالة f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة على اليمين و على اليسار في x_0

التمديد بالاتصال

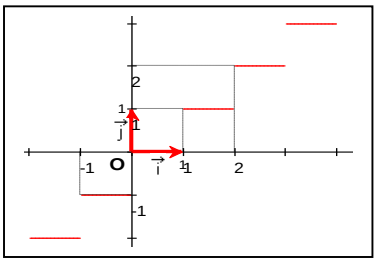
3)- دالة الجزء الصحيح Fonction partie entière

تعريف

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z} / n \leq x < n+1$.
- الدالة العددية التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد n تسمى دالة الجزء الصحيح و نكتب : $E(x)=n$ أو أيضا $[x]=n$.

نتائج

- $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x)+1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1)=E(x)+1$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, E(n)=n$.
- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في n و غير متصلة في n على اليسار لكل n من $\mathbb{Z}$.
- دالة الجزء الصحيح متصلة على المجال $[n,n+1[$ لكل n من $\mathbb{Z}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [n,n+1[, E(x)=n$.



- منحنى دالة الجزء الصحيح

4)- الاتصال على مجال Continuité sur un intervalle

تعريف

- نقول إن الدالة f متصلة على مجال مفتوح I ، إذا كانت متصلة في كل نقطة من I.
- نقول إن الدالة f متصلة على مجال $[a,b]$، إذا كانت متصلة على $]a,b[$ و متصلة في a على اليمين و في b على اليسار.

ملاحظة

نعرف بالمثل اتصال دالة عددية على المجالات $]a,b]$ و $[a,b[$ و $[a,+\infty[$ و $]a,+\infty[$ و $]-\infty,a]$ و $]-\infty,a[$.

5)- العمليات على الدوال المتصلة

خاصية

ليكن I مجالا ضمن $\mathbb{R}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على I فإن الدوال $f+g$ و fg و λf دوال متصلة على I.
- إذا كانت f و g متصلتين على I و g لا تنعدم على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتان متصلتان على I.

خاصية: اتصال دوال عددية اعتيادية

الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ و الدالة $x \mapsto \cos x$ و الدالة $x \mapsto \sin x$ و الدالة $x \mapsto \tan x$ دوال متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

ملاحظة

قصور دالة متصلة هي دالة متصلة.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\begin{cases} x^2-x, x\geq 0 \\ \dfrac{x}{1+x^2}, x<0 \end{cases}$.

- الدالة $x\mapsto x^2-x$ متصلة على المجال $[0,+\infty[$ (لأنها قصور حدودية)
- الدالة $x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ متصلة على المجال $]-\infty,0[$ (لأنها قصور دالة جذرية)
- و لدينا $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ و منه f متصلة في الصفر على اليسار

و بالتالي f متصلة على $\mathbb{R}$.

تمرين

بين أن الدالة f متصلة على المجال I في الحالات التالية:

- $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $I=[0,+\infty[$.
- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ و $I=\mathbb{R}$.
- $f(x)=x^2-\tan x$ و $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\begin{cases} x+a, x<1 \\ 2x-3, 1\leq x\leq 3 \\ bx+1, x>3 \end{cases}$.

حدد العددين a و b لكي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

II)- اتصال مركب دالتين Continuité de la composée de deux fonctions

1)- اتصال مركب دالتين

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث : $f(I)\subset J$ و $x_0\in I$.

- إذا كانت f متصلة في x_0 و g متصلة في $f(x_0)$ فإن الدالة $g\circ f$ متصلة في x_0.
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$ فإن الدالة $g\circ f$ متصلة على المجال I.

أمثلة

أدرس اتصال الدالة f على مجموعة تعريفها في الحالات التالية:

$f(x)=\cos\left(x^2-x+2\right)$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos^2 x}}$

$f(x)=\sqrt{x^2-x}$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2x-1}}$

نتيجة

- إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt{f}$ دالة متصلة على المجال I.
- إذا كانت f دالة متصلة وعلى مجال I فإن f^n و $|f|$ متصلتان على المجال I.

2- مركب دالة متصلة و دالة تقبل نهاية

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال مفتوح J مركزه l بحيث : $f(I)\subset J$.

❖ إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و g دالة متصلة في l فإن $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=g(l)$.

ملاحظة

الخاصية السابقة تبقى أيضا صحيحة في x_0^+ أو x_0^- أو $+\infty$ أو $-\infty$ مع تعويض I بمجال مناسب.

أمثلة

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x} \qquad \lim_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{x+1}-1}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\pi\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) \qquad \lim_{x\to0}\tan\left(\frac{\pi\sin x}{3x}\right)$$

ملاحظة

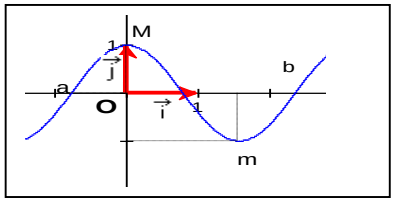
إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to l} g(x)=l'$ فإن نهاية $g\circ f$ (إن وجدت) عندما يؤول x إلى x_0 لا تساوي بالضرورة l'.

مثال مضاد: $f(x)=\begin{cases}1, x\neq0\\2, x=0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}3, x\neq1\\5, x=1\end{cases}$.

لدينا: $g\circ f(x)=\begin{cases}5, x\neq0\\3, x=0\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to1} g(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to0} g\circ f(x)=5$

III)- صورة مجال بدالة متصلة Image d'un intervalle par une fonction continue

1)- صورة قطعة – صورة مجال بدالة متصلة



خاصية

❖ صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

❖ صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

ملاحظة

- إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن المجالين I و $f(I)$ ليسا من نفس الطبيعة دائما.

مثال مضاد

❖ $f(x)=x^2$ و $I=[-1,1[$. $f([-1,1[)=[0,1]$

ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على قطعة $[a,b]$ فإن: $\exists(m,M)\in\mathbb{R}^2 / f([a,b])=[m,M]$. ولدينا:

❖ m هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال $[a,b]$ و نكتب: $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)=m$.

❖ M هي القيمة القصوى للدالة f على المجال $[a,b]$ و نكتب: $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=M$.

❖ $\forall\lambda\in[m,M],\exists c\in[a,b]/ f(c)=\lambda$. (شمولية f)

2)- مبرهنة القيم الوسيطية Théorème des valeurs intermédiaires

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I ، و a و b عنصرين من I.
لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c محصور بين a و b بحيث
$f(c)=k$

نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و $f(a)f(b)<0$ ، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$.

أمثلة

1) - لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x^3-3x^2-5$.
بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]2,4[$.

2) - بين أن المعادلة $\cos x+\frac{1}{2}=x$ تقبل حلا في المجال $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$.

3)- حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا

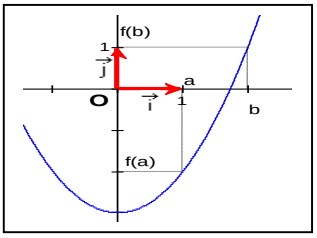
إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإن $f(I)$ يحدد كما في الجدول التالي:

أ)- f متصلة و تزايدية قطعا على I

المجال I	المجال $f(I)$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$
$[a;b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(a)\right]$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\right[$

ب)- f متصلة و تناقصية قطعا على I

المجال I	المجال $f(I)$
$[a,b]$	$[f(b),f(a)]$
$[a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$



نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد λ

محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=\lambda$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x^5-x^3+x-2$.

1) – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1<\alpha<2$.

2) – حدد إشارة $f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

3) بين أن المعادلة $x^3+x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن $0<\alpha<1$