Série n^0 3: Opérations élémentaires *SMP2*

Exercice 1 Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

On rappelle que $T_{ij} = I_n - \lambda E_{ij}$ désigne la matrice de transvection et que $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ celle de dilatation (de rapport λ).

1. Selon la consigne, décrire ou écrire l'opération matricielle élémentaire sur A et exhiber la matrice obtenue :
   a) Multiplier la deuxième ligne de A par 6.
   b) Multiplier la deuxième ligne de A par 2 puis l'ajouter à la dernière ligne.
   c) Effectuer le produit $T_{12}(-3)A$.
   d) Effectuer le produit $D_2(7)AT_{31}(2)$.
2. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Ecrire une opération élémentaire aboutissant à l'annulation du coefficient $b_{22} = -2$ de la matrice B. Cette opération est-elle unique ?

Exercice 2

Soit A la matrice de l'exercice précédent. On rappelle que, d'après l'exercic $n^0 4$ de la série $n^0 2$, la matrice A est inversible.

1. Calculer le déterminant de A en opérant sur les lignes jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.
2. Continuer à opérer sur les lignes (ou sur les colonnes) jusqu'à obtenir une matrice diagonale.
3. Résoudre, par la méthode de Cramer, le système linéaire $A\vec{X} = \vec{b}$ où $X = {}^t(x, y, z)$ et $\vec{b} = {}^t(2, -1, 0)$
4. Résoudre de nouveau ce système en utilisant la méthode de Gauss.

Exercice 3 Pour tout triplet de nombres réels (a, b, c), on considère M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} a^2 & a^3 & a^4 \\ b^2 & b^3 & b^4 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de M en vous inspirant de celui de Vandermond.
2. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice M est-elle inversible ?

Exercice 4 Soit le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 & = & -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 & = & 1 \\ -3x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 6x_4 - 4x_5 & = & 5 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 9x_5 & = & -4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 & = & 2 \end{cases}$$

1. Ecrire (S) sous forme matricielle : $AX = b$
2. Le résoudre par la méthode de Gauss.
3. Calculer l'inverse de A par la méthode de l'action sur l'identité vue au cours(opérations élémentaires simultanées sur AA^{-1} et sur I_5)