I. تعاريف و مصطلحات

1. تعريف

كل عدد عقدي z يكتب على شكل $z = a + ib$ بحيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ويرمز له $Re(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ويرمز له $Im(z)$
- العدد i يسمى عدد تخيلي بحيث $i^2 = -1$
- مجموعة الأعداد العقدية نرمز لها $\mathbb{C}$

2. ملاحظة

$i \notin \mathbb{R}$

$i^2 = -1$

$i^3 = -\mathrm{i}$

$i^4 = 1$

3. حالتان خاصتان

ليكن z عدد عقدي

- إذا كانت $Im(z) = 0$ فإن z عدد حقيقي
- إذا كانت $Re(z) = 0$ فإن z يسمى عدد تخيلي صرف

4. تساوي عددين عقديين

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$$

بتعبير آخر

$$a + ib = a' + ib' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

II.المرافق و المعيار

1. تعريف

$$z = a + ib$$

المعيار

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

المرافق

$$\bar{z} = a - ib$$

2. خاصيات (المرافق)

$$z = a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z} = a - ib$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

3. خاصيات (المعيار)

$$z = a + ib \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

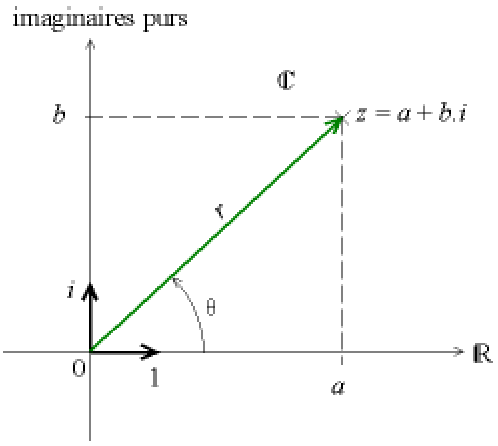
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

4. ملاحظة

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}$$

III. الشكل المثلثي لعدد عقدي

1. عمدة عدد عقدي



ليكن z عدد عقدي بحيث $z = a + ib$ مع $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$.

نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a;b)$

العدد z يسمى لحق النقطة M

والنقطة M تسمى صورة z و نكتب $M(z)$

الزاوية θ تسمى عمدة العدد العقدي z

ونرمزله بالرمز $arg(z)$

$$arg(z) \equiv \theta[2\pi]$$

2. ملاحظات هامة

- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- المسافة AB هي $AB = |z_B - z_A|$
- I منتصف القطعة $[AB]$ $\quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

3. الشكل المثلثي لعدد عقدي

ليكن z عدد عقدي غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي $\quad z = re^{i\theta}$

4. ملاحظة

لتحديد الشكل المثلثي

- نحسب $|z|$
- نعمل ب $|z|$ في z
- نحدد قيمة كل من $\sin\theta$ و $\cos\theta$

5. علاقات مثلثية هامة

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)$$
$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)$$
$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

6. العمدة و العمليات

$$arg(z\times z') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$$
$$arg(z^n) \equiv n\,arg(z)[2\pi]$$
$$arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$$
$$arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)[2\pi]$$
$$arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$$

7. الشكل المثلثي و العمليات

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)\times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$$
$$\left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$
$$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta'))$$
$$\frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

8. حالات خاصة

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

إذا كانت $a>0$

$$a = a(\cos 0 + i\sin 0) \qquad ai = a(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

إذا كانت $a<0$

$$a = -a(\cos\pi + i\sin\pi) \qquad ai = -a(\cos-\frac{\pi}{2} + i\sin-\frac{\pi}{2})$$

9. ملاحظة

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{و} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \text{و} \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

10. قياس زاوية

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) \equiv arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right)[2\pi]$$

IV.التحويلات في المستوى

التحويلات في المستوى

الإزاحة	التحاكي	الدوران
لتكن الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ $z' = z + \omega$	ليكن التحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k $z' - \omega = k(z - \omega)$	ليكن الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته θ $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

V.طبيعة المثلث و طبيعة الرباعي

1. طبيعة المثلث

ليكن ABC مثلث بحيث

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = r \qquad et \qquad arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) \equiv \theta[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = r \qquad et \qquad \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \theta[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow AB = r\,AC \qquad et \qquad \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \theta[2\pi]$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$$

$r \neq 1$ $\theta \equiv \mp\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ABC قائم الزاوية	$r = 1$ $\theta \not\equiv \mp\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ABC متساوي الساقين	$r = 1$ $\theta \equiv \mp\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية	$r = 1$ $\theta \equiv \mp\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ABC متساوي الأضلاع

2. خاصيات

- A و B و C نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \quad \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان $\Leftrightarrow \quad arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) \equiv 0 \; ou \; \pi[2\pi]$
- المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان $\Leftrightarrow \quad arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) \equiv \mp\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
- A و B و C و D نقط متداورة $\Leftrightarrow \quad \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \times \dfrac{z_A - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$

3. صيغة MOIVRE

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

4. صيغتا EULER

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

5. المعادلات من الدرجة الثانية

$$az^2 + bz + c = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

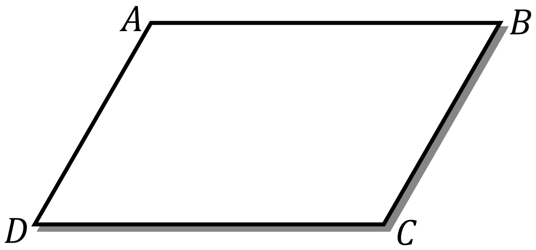
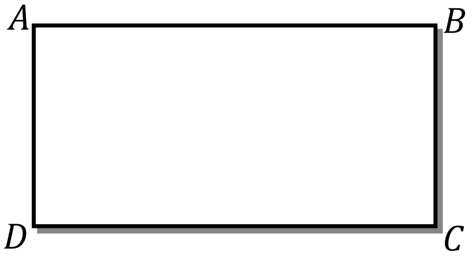
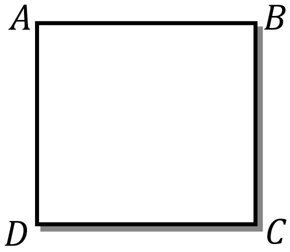
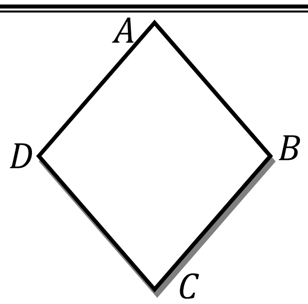
- $\Delta < 0$: المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$: المعادلة تقبل حلا وحيدا
$$x = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta > 0$: المعادلة تقبل حلين حقيقيين
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

6. ملاحظة

- لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين من المستوى العقدي (P) وليكن $R \in]0; +\infty[$
- مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z-a| = R$ هي الدائرة $C(A; R)$ التي مركزها A و شعاعها R
- مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z-a| = |z-b|$ هي واسط القطعة $[AB]$

الأشكال الهندسية	طريقة البرهان
	متوازي الأضلاع $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
	مستطيل • متوازي الأضلاع • زاوية قائمة
	مربع • متوازي الأضلاع • زاوية قائمة • ضلعان متتابعان متقايسان
	معين • متوازي الأضلاع • ضلعان متتابعان متقايسان