| ثانوية وادي الذهب التأهيلية ـ تيفلت | المجموعات: $\mathbb{R},\mathbb{Q},ID,\mathbb{Z},\mathbb{N}$ | المستوى : جذع مشترك علمي |
|---|---|---|
| الأستاذ : محمد إعلو | $\mathbb{N},\mathbb{Z},ID,\mathbb{Q},\mathbb{R}$ Les ensembles | عدد الساعات: 5 ساعات . |

# مجموعات الأعداد

## أهداف الدرس

- التمييز بين الأعداد و التعرف على الرموز $\mathbb{R},\mathbb{Q},ID,\mathbb{Z},\mathbb{N}$ .
- التعرف على الرموز $\notin,\subset,\notin,\in$ و توظيفها.
- توظيف العمليات و قواعد القوى في تبسيط تعابير.
- استعمال الكتابة العلمية.
- التعرف على المتطابقتين الهامتين $a^3+b^3$ و $a^3-b^3$ .
- توظيف متطابقات هامة في النشر و التعميل.

## القدرات المستهدفة

- إدراك العلاقات بين الأعداد و التمييز بين مختلف مجموعات الأعداد.
- تحديد كتابة مناسبة لتعبير جبري حسب الوضعية المدروسة.

## فقرات الدرس

- المجموعات $\mathbb{R},\mathbb{Q},ID,\mathbb{Z},\mathbb{N}$ .
- العمليات في مجموعة الأعداد الحقيقية.
- الجذور المربعة.
- القوى- قوى العدد *10*- الكتابة العلمية.
- متطابقات هامة – النشر و التعميل.

| ثانوية وادي الذهب التأهيلية ـ تيفلت | المجموعات: $\mathbb{R},\mathbb{Q},ID,\mathbb{Z},\mathbb{N}$ | المستوى : جذع مشترك علمي |
|---|---|---|
| الأستاذ : محمد إعلو | Les ensembles $\mathbb{N},\mathbb{Z},ID,\mathbb{Q},\mathbb{R}$ | عدد الساعات: 5 ساعات . |

## I)- المجموعات: $\mathbb{R},\mathbb{Q},ID,\mathbb{Z},\mathbb{N}$

- الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة تكتب كما يلي: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$.
- الأعداد الصحيحة النسبية تكون مجموعة تكتب كما يلي: $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$.
- الأعداد العشرية النسبية تكون مجموعة تكتب بالإدراك كما يلي: $ID=\left\{\frac{a}{10^n}/\ a\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\right\}$.
- الأعداد الجذرية تكون مجموعة تكتب بالإدراك كما يلي: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/\ a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*\right\}$ .
- مجموعة الأعداد الحقيقية تحتوي على الأعداد الجذرية و اللاجذرية يرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ و تحقق : على مستقيم $(D)$ مزود بمعلم $(O,I)$، لدينا :
  - كل عدد حقيقي يمثل بنقطة وحيدة على المستقيم $(D)$.
  - عكسيا كل نقطة من المستقيم $(D)$ تمثل عددا حقيقيا وحيدا يسمى أفصول هذه النقطة.
- $\mathbb{R}^+$ هي مجموعة الأعداد الموجبة ، و $\mathbb{R}^-$ هي مجموعة الأعداد السالبة.

**ملاحظة**

- لدينا : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

**تمرين**

1) ـ أتمم باستعمال أحد الرموز التالية: $\in,\notin,\subset,\not\subset$

$\frac{2}{3}...ID$ ، $\sqrt{2}...\mathbb{Q}$ ، $\pi...\mathbb{Q}$ ، $\frac{7}{2}...\mathbb{R}_+$ ، $\frac{22}{7}...\mathbb{Q}$ ، $\left\{0,\frac{5}{2}\right\}...ID$ ، $\mathbb{Z}^*...\{1,-1\}$ .

2) ـ أنشئ على محور $D(O,I)$ النقط التي أفاصيلها على التوالي هي الأعداد التالية:

$-\frac{2}{3},\sqrt{3},\frac{7}{2}$ .

## II)-العمليات في مجموعة الأعداد الحقيقية (تذكير)

### 1)-الجمع في $\mathbb{R}$

توجد في $\mathbb{R}$ عملية تسمى عملية الجمع ، يرمز لها بالرمز+ و تحقق الخاصيات التالية:

لكل ثلاثة أعداد حقيقية $a$ و $b$ و $c$ ، لدينا:

- $a+b=b+a$ ( نقول إن الجمع تبادلي في $\mathbb{R}$ )
- $a+(b+c)=(a+b)+c$ ( نقول إن الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$ )
- $a+0=0+a=a$ ( نقول إن الصفر هو العنصر المحايد للجمع في $\mathbb{R}$ )
- $(-a)+a=a+(-a)=0$ ( نقول إن العددين $(-a)$ و $a$ متقابلان )

**ملاحظة**

- إذا كان: $\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}$ فإن $a+c=b+d$.
- العكس غير صحيح: $1+5=7+3$ و $1\neq 5,7\neq 3$

❖ لدينا: $a-b=a+(-b)$ ، لكل $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}$.

## 2)- الضرب في $\mathbb{R}$.

توجد في $\mathbb{R}$ عملية تسمى عملية الضرب يرمز لها بالرمز $\times$ و تحقق الخاصيات التالية:

لكل ثلاثة أعداد حقيقية $a$ و $b$ و $c$ ، لدينا:

- ❖ $a\times b=b\times a$ ( نقول إن الضرب تبادلي في $\mathbb{R}$ )
- ❖ $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ ( نقول إن الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$ )
- ❖ $a\times 1=1\times a=a$ ( نقول إن $1$ هو العنصر المحايد للضرب في $\mathbb{R}$ )
- ❖ $\frac{1}{a}\times a=a\times\frac{1}{a}=1, a\neq 0$ ( نقول إن العدد $\frac{1}{a}$ هو مقلوب $a$).
- ❖ $a(b+c)=ab+ac$ ( نقول إن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $\mathbb{R}$ )
- ❖ $a(b-c)=ab-ac$ ( نقول إن الضرب توزيعي بالنسبة للطرح في $\mathbb{R}$ )

### ملاحظة

❖ إذا كان $\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}$ فإن: $ac=bd$ .

❖ العكس غير صحيح : لدينا $3\times 2=4\times 6$ ومع ذلك $4\neq 6$ و $2\neq 3$.

❖ لدينا: $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ لكل $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}^*$.

## 3)-العمليات على الكسور

لتكن $a,b,c$ و $d$ أعدادا حقيقية بحيث: $bd\neq 0$.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc},bcd\neq 0 \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc},bc\neq 0 \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{ac}{b},bc\neq 0 \qquad k\frac{a}{b}=\frac{ka}{b}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ يعني } ad=bc \qquad \frac{a}{b}=c \text{ يعني } a=bc \qquad \frac{a}{b}=1 \text{ يعني } a=b \qquad \frac{a}{b}=0 \text{ يعني } a=0$$

### تمرين

▪ بسط كتابة التعبير التالي : $A=\frac{1}{x-1}-\frac{1-\frac{1}{x-2}}{1+\frac{1}{x-2}}$ حيث $x$ عدد حقيقي يخالف $1$ و $2$.

### ملاحظة

لدينا: $ab=0$ ( يكافئ $a=0$ أو $b=0$). و لدينا: $ab\neq 0$ ( يكافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$).

### تمرين

بسط التعابير التالية:

1) - $A(x)=(2x-y)(2y+x)-(2z+y)(2y-z)+(2x-z)(2z-x)$.

2) - $B(x)=\dfrac{1}{2x(2x-1)}-\dfrac{2x}{2x-1}-\dfrac{1-2x}{2x}$.

## III)-الجذور المربعة

### تعريف

ليكن $x$ عددا حقيقيا موجبا.
نسمي جذر مربع $x$ ، العدد الحقيقي الموجب $y$ بحيث : $y^2=x$ و نكتب $y=\sqrt{x}$

### أمثلة

$\sqrt{9}=3,\sqrt{121}=11,\sqrt{(-7)^2}=7,\sqrt{1}=1,\sqrt{0}=0$.

### خاصيات

لكل $a$ و $b$ من $\mathbb{R}^+$ ، لدينا:

1- $\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a$

2- $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$

3- $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

4- $\sqrt{\dfrac{1}{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$ حيث $a\in\mathbb{R}_+^*$

5- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ حيث $b\neq 0$

### ملاحظة

- لكل $x$ من $\mathbb{R}$ : $\sqrt{x^2}=|x|$.
- على العموم $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ . ( $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ و $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ ).
- لكل $x$ و $y$ من $\mathbb{R}^+$ : $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ يكافئ $x=y$.
- لكل $x$ من $\mathbb{R}^+$ : $\sqrt{x}=0$ يكافئ $x=0$.

### تمرين

بسط التعبيرين التاليين:

$A=\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ و $B=\sqrt{a}\sqrt{a^3b^2}-\sqrt{b}\sqrt{a^4b}+\sqrt{\sqrt{a^4b^4}}$ حيث $a\in\mathbb{R}^+$ و $b\in\mathbb{R}^+$

.

### تمرين

نعتبر العددين الحقيقيين $A$ و $B$ بحيث: $A=\sqrt{19+6\sqrt{10}}$ و $B=\sqrt{19-6\sqrt{10}}$.

1) – بين أن $AB=1$.

2) – نضع: $X=A+B$ و $Y=A-B$.

أ)- أحسب العددين $X^2$ و $Y^2$ .

ب)- استنتج كتابة مبسطة للعددين $X$ و $Y$.

3)- حدد كتابة مبسطة للعددين $A$ و $B$.

### تمرين

نعتبر العدد الحقيقي $A$ بحيث: $A=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

1)- أحسب ثم بسط العدد الحقيقي $A^2$ .

2)- استنتج قيمة مبسطة للعدد الحقيقي $A$ .

## IV)- القوى – قوى العدد 10 – الكتابة العلمية

### 1)- القوة الصحيحة لعدد حقيقي

**تعريف**

ليكن $a\in\mathbb{R}^*$ و $n\in\mathbb{N}$ .

$a^0=1$

$a^1=a$

$a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ عاملا}}$ .

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\underbrace{\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}\times\ldots\times\frac{1}{a}}_{n\text{ عاملا}}$

### 2)-العمليات على القوى

لكل $m$ و $n$ من $\mathbb{Z}$ ، و لكل $a$ و $b$ من $\mathbb{R}^*$ ، لدينا:

1)- $a^nb^n=(ab)^n$

2)- $a^na^m=a^{n+m}$

3)- $(a^n)^m=a^{n.m}=(a^m)^n$

4)- $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$

5)- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

**تمرين**

بسط التعبيرين : $A=\frac{(3^2\times11^5)^{-2}}{(3^4\times11^2)^3}\times\frac{(33)^{15}}{3^2\times11^{-1}}$ و $B=\frac{a^{-2}b\left(a^2b^{-1}\right)^4a^{-3}b^2}{ab^{-2}\left(a^{-1}b^2\right)^3\left(a^2b^3\right)}$

### 3)- حالة خاصة: قوى العدد 10

$10^0=1$ $\quad 10^{-1}=0.1$

$10^1=10$ $\quad 10^{-2}=0.01$

$10^n=1\,00\ldots0$ ($n$ أصفار)

$10^{-n}=\underbrace{0.00\ldots0}_{n\text{ أصفار}}1$

### 4)-الكتابة العلمية لعدد عشري

كل عدد عشري موجب $x$ يكتب على الشكل $x=a10^p$ حيث: $p\in\mathbb{Z}$ و $a$ عدد عشري بحيث $1\le a<10$. هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية للعدد $x$ .

**ملاحظة**

إذا كان $x$ عددا عشريا سالبا فإن كتابته العلمية هي $x=-a10^p$ . بحيث $1\le a<10$.

**مثال**

**أعط الكتابة العلمية لكل من العددين التاليين:**

- سرعة الضوء : $C = 299792458\,ms^{-1}$
- عدد أفوكادرو: $N = 6022.045 \times 10^{20}\,mol^{-1}$

## V)- متطابقات هامة – النشر و التعميل

| | |
|---|---|
| $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ | $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ |
| $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ | $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ |
| $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |

**ملاحظة**

| | |
|---|---|
| $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$ | $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ |
| $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ | $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ |

**تمرين**

**عمل التعابير التالية:**

$A = 1 - (1-2x)^2$ و $B = x^{12} - 2x^6 + 1$

$C = x^2 - 6x + 8$ و $D = x^2 - 3x + 2$

**تمرين**

1) – أنشر التعبير $(2x-y)^2$ حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

2) – استنتج قيمة العدد $(199)^2$

**تمرين**

نعتبر العدد الحقيقي $A$ بحيث: $A = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1) -حدد إشارة العدد الحقيقي $A$ .

2) -أحسب $A^2$ ثم استنتج قيمة مبسطة للعدد $A$ .

**تمرين**

- بين أن $\frac{2^n}{5^m} \in ID$ ، لكل $m$ و $n$ من $\mathbb{N}$.

**تمرين**

- بين أن : $\frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2} \in \mathbb{N}$ ، لكل عدد صحيح طبيعي $n$ من $\mathbb{N}$ .

| ثانوية وادي الذهب التأهيلية ـ تيفلت | المجموعات: $\mathbb{R},\mathbb{Q},ID,\mathbb{Z},\mathbb{N}$ | المستوى : جذع مشترك علمي |
|---|---|---|
| الأستاذ : محمد إعلو | Les ensembles $\mathbb{N},\mathbb{Z},ID,\mathbb{Q},\mathbb{R}$ | عدد الساعات: 5 ساعات . |