مؤسسة طيبة للتعليم الخصوصي — **متسلسلة حول المتتاليات العددية** — 1باك علوم رياضية 01-01-2010

تمرين1

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي $\forall n \in IN \quad u_n = \dfrac{-2n+1}{n+3}$.

1. تاكد ان $\forall n \in IN \quad u_n = -2 + \dfrac{7}{n+3}$ وان $\forall n \in IN \quad u_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{7n}{n+3}\right)$.
2. استنتج ان (u_n) محدودة .
3. بين ان المتتالية (u_n) تناقصية قطعا.
4. حدد اصغر قيم n التي من اجلها يكون العدد 2- قيمة مقربة ل u_n بالدقة 10^{-2} .

تمرين2

نعتبر المتتاليتن المعرفتين بما يلي

$\forall n \geq 2 \quad u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ و $\forall n \geq 1 \quad v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

1. بين ان $(u_n)_{n\geq 2}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ محدودتان.
2. ادرس رتابة المتتاليتين السابقتين.
3. بين ان $\forall n \geq 2 \quad v_n \leq u_n$.
4. برهن ان $\forall n \geq 1 \quad 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leq 1 - \dfrac{1}{n}$.

تمرين3

نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي $(\forall n \in IN)\, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. ادرس رتابة هده المتتالية.
2. بين ان $(\forall n \geq 1)\, 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ واستنتج ان (u_n) محدودة.
3. لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية دات الحد العام

$$v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

أ. ادرس رتابة هده المتتالية .

ب. بين ان $(\forall n \geq 1)\, 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq v_n$.

ت. استنتج ان $(v_n)_{n\geq 1}$ مصغورة وغير مكبورة.

تمرين4

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$u_0 = 3$ و $\forall n \in IN \quad u_{n+1} = 10u_n + 3$.

1. بين ان $\forall n \in IN \quad u_n \geq 3.10^n$.
2. بين ان (u_n) تزايدية قطعا .
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب $(\forall n \in IN)\, v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.
بين ان (v_n) متتالية هندسية محددا اساسها .
4. اكتب u_n بدلالة n لكل n من IN .
5. مستعملا ما سبق احسب المجموع التالي

تمرين8 (متسلسلة الاستاد جابر 2008)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 2 \\ \forall n \geq 0 : 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

1. احسب u_2 و u_3
2. بين ان المتتالية دات الحد العام $v_n = u_{n+1} - u_n$ متتالية هندسية.
3. احسب المجموع التالي $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ بدلالة $n \in IN^*$.
4. استنتج u_n بدلالة $n \in IN^*$.

تمرين9

نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \end{cases}$

1. بين بالترجع ان $\forall n \in IN \quad u_n \succ 0$ وان $\forall n \in IN^* \quad u_n \geq \sqrt{5}$.
2. ادرس رتابة هده المتتالية.
3. لكل n من IN^* نضع $v_n = u_n - \sqrt{5}$.

أ. بين ان $\forall n \geq 1 \quad v_n = \dfrac{v_{n-1}}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$.

ب. استنتج ان $\forall n \geq 2 \quad v_n \leq \dfrac{v_{n-1}}{2}$.

4. بين ان $\forall n \geq 1 \quad 0 \leq u_n - \sqrt{5} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(u_1 - \sqrt{5}\right)$

تمرين10

جزء اول

بين انه لكل عددين حقيقيين a و b بحيث $0 \prec a \prec b$.

$$a \prec \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \prec \frac{a+b}{2} \prec b$$

جزء ثاني

نعتبرالمتتاليات المعرفة بما يلي

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$ و $w_n = u_n - v_n$.

1. احسب u_1 و v_1 .
2. اثبت بالترجع ان $(\forall n \in IN)\, 1 \leq v_n \prec u_n \leq 2$.
3. ادرس رتابة المتتاليتين (u_n) و (v_n) السابقتين.
4. بين ان $(\forall n \in IN)\, 0 \prec w_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} w_n$.

2010رقم

$S = 3 + 33 + 333 + \cdots + \overbrace{33\ldots3}$

تمرين5 (متسلسلة الاستاد جابر2008)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}; n \geq 0 \end{cases}$$

1. بين ان $\forall n \geq 0 : u_n > 2$ ثم ادرس رتابة (u_n) .
2. لكل n من IN نضع $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$. بين ان (v_n) متتالية حسابية.
3. احسب v_n ثم u_n بدلالة n .
4. احسب المجموع التالي بدلالة n
$S_n = v_à + v_1 + \ldots . v_n$

تمرين6 (متسلسلة الاستاد جابر 2008)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ \forall n \geq 1 : u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$

1. بين ان $\forall n \geq 1 : 0 < u_n < 2$ ثم ادرس رتابة $(u_n)_{n\geq1}$.
2. لكل n من IN* نضع $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$. بين ان $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية.
3. احسب u_n بدلالة n .
4. احسب بدلالة n المجموع التالي $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$.

تمرين7 (متسلسلة الاستاد جابر 2008)

نعتبر المتتاليتن المعرفتين بما يلي $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 5; n \geq 0 \end{cases}$ و

$v_n = u_{n+1} - u_n$ لكل n من IN.

1. احسب v_0 و v_1 و v_2 ثم بين ان (v_n) متتالية حسابية.
2. احسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \ldots . v_{n-1}$ واستنتج u_n بدلالة n

5. استنتج ان $(\forall n \in IN)\ 0 \prec u_n - v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
6. بين ان $(\forall n \in IN)\ u_n v_n = 2$.
7. بين ان $(\forall n \in IN) 1 \leq v_n \prec \sqrt{2} \prec u_n \leq 2$

تمرين11

جزء اول

بين ان $(\forall x \in IR)(\forall n \in IN^*)\ 0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$ **.**

جزء ثاني

ليكن x عددا حقيقيا . نعتبر المتتاليتين المعرفتين بما يلي

$$\forall n \in IN \quad v_n = u_n + \frac{1}{10^n} \text{ و } u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$$

1. حدد u_0 و v_0 ثم بين ان $\forall n \in IN\ (u_n, v_n) \in Q^2$.
2. بين ان $\forall n \in IN\ u_n \leq x \prec v_n$.
3. ادرس رتابة المتتاليتين السابقتين.

تمرين12

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a \prec b$. نضع $I = [a,b]$ ونعتبر دالة عددية f معرفة على هدا المجال حيث $f(I) \subset I$ وتقبل نقطة صامدة c عليه وتحقق $\forall (x,y) \in I^2\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ حيث k عدد حقيقي موجب قطعا. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. بين ان $\forall n \in IN\ |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$.
2. استنتج ان $\forall n \in IN\ |u_n - \alpha| \leq k^n |b - a|$.
3. استنتج ان (u_n) محدودة.
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي $\forall n \in IN\ \ v_n = |u_n - \alpha|$
بين ان $\forall n \in IN\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \leq \frac{b-a}{1-k}$.
5. نفترض ان f تزايدية على I وان $f(u_0) \prec u_0$ ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

تطبيق ناخد $f(x) = \sqrt{x}$ و $I = [1,4]$ و $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. ادرس رتابة المتتالية (u_n)
2. بين ان $\forall n \in IN\ |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.