المـــادة : الرياضيات **الأستاذ** : أسويدي محمد	**الدرس 5** : **المتتاليات العددية**	**المستوى** : جدع مشترك علوم **المؤسسة** : ثانوية رحال المسكيني التأهيلية

القدرات المنتظرة	✍ توظيف الاستدلال بالترجع ✍ التمكن من دراسة متتالية (إكبار ؛ إصغار ؛ رتابة) ✍ التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها و حدها الأول . ✍ حساب مجموع n حدا متتابعة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية . ✍ التعرف على وضعيات لمتتاليات حسابية أو هندسية . ✍ استعمال المتتاليات الحسابية والهندسية في حل مسائل .
التوجيهات التربوية	☑ يمكن تقديم مفهوم المتتاليات الترجعية من خلال وضعيات مستقات من مختلف المواد . ☑ يشكل درس المتتاليات فرصة لتعويد التلاميذ على استعمال الأدوات المعلوماتية. ☑ ينبغي استغلال هذه المناسبة لتوظيف الإستدلال بالترجع . ☑ ينبغي تناول المتتاليات الترجعية دون مغالاة .
أهداف الدرس	✍ تعرف متتالية عددية – ترميز – تحديد حدود متتالية . ✍ تعرف متتالية ترجعية وتوظيف الإستدلال بالترجع ✍ دراسة متتالية مكبورة – متتالية مصغورة – متتالية محدودة ✍ تحديد رتابة متتالية ✍ تعرف متتالية حسابية وتحديد أساسها وحدها الأول. ✍ تحديد مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية ✍ تعرف متتالية هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول. ✍ تحديد مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية ✍ توظيف المتتاليات الحسابية و الهندسية في حل مسائل .
المكتسبات القبلية	⮜ الأعداد الصحيحة الطبيعية . ⮜ تقنيات الحساب العددي ⮜ الدوال العددية (الإكبار ؛ الإصغار ؛... الرتابة .رسم المنحنى) . ⮜ الإستدلال بالترجع .
الامتدادات	✍ نهاية متتالية ✍ دراسة بعض الظواهر الفيزيائية والطبيعية ✍ تستعمل المتتاليات في عدد كبير من المسائل الرياضية والفيزيائية والتكنولوجية والاقتصادية . ✍ ....
فقرات الدرس	**I) المتتاليات العددية – عموميات** **II) المتتاليات الحسابية** **III) المتتاليات الهندسية**

I) المتتاليات العددية – عموميات

1) تعاريف ومصطلحات

تعريف

ليكن I جزءا من $\mathbb{N}$.
نسمي متتالية عددية U كل تطبيق معرف من I نحو $\mathbb{R}$. أوكل دالة عددية معرفة على I تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$.

مصطلحات وترميز

- صورة العدد n بالدالة (أو التطبيق) U يرمز لها بالرمز U_n $\left(U(n)=U_n\right)$
- نرمز للمتتالية U بالرمز $(U_n)_{n\in I}$.
- العدد U_n يسمى الحد العام للمتتالية U .

أمثلة

- ✓ متتالية الأعداد الفردية حدها العام هو $U_n=2n+1$
- ✓ متتالية الأعداد الزوجية حدها العام هو $U_n=2n$
- ✓ التطبيق (أو الدالة) التالية : $\begin{array}{l} u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\mapsto n^2+n\end{array}$ هو المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي حدها العام $u_n=n^2+n$

2) المتتالية المعرفة بالصيغة الصريحة لحدها العام

تعريف

المتتالية المعرفة بصيغتها الصريحة لحدها العام هي متتالية يمكن تحديد أي حد من حدودها مباشرة (أي الحد العام u_n معرف بدلالة n و غير مرتبط بالحدود السابقة)

مثـــال :

✓ المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة بمايلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):u_n=\dfrac{2}{n}$ حدها العام معرف بالصيغة الصريحة $\dfrac{2}{n}$ ؛ يمكن حساب أي حد من حدود المتتالية دون معرفة الحدود الأخرى . $u_{2007}=\dfrac{2}{2007}$; $u_7=\dfrac{2}{7}$; $u_3=\dfrac{2}{3}$.....

3) المتتالية الترجعية

تعريف

عندما تكون متتالية معرفة بحدودها الأولى وبعلاقة تسمح من تحديد أي حد من حدودها باستعمال الحدود السابقة فإننا نقول إنها متتالية ترجعية (أو معرفة بعلاقة ترجعية)

أمثلة : نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي :

$\begin{cases}u_0=2\\ (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=3+u_n\end{cases}$ في هذا المثال فإنه لا يمكن حساب u_4 دون معرفة u_3 و لا يمكن حساب u_3 دون معرفة u_2 .....

فنجد :

$$\begin{aligned}u_4&=3+u_3=3+(3+u_2)=3+\left(3+(3+u_1)\right)\\&=3+\left(3+\left(3+(3+u_0)\right)\right)=3+\left(3+\left(3+(3+2)\right)\right)\\&=3+3+3+3+2=14\end{aligned}$$

تمرين 01

نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}u_0=2\\ (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=3+\dfrac{u_n}{1+u_n}\end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 و u_3 .

2) بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\dfrac{2}{2n+1}$

4) المتتالية المكبورة ـ المتتالية المصغورة ـ المتتالية المحدودة

نشاط

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي : $u_n=\frac{3}{2}n+5$ و $v_n=\frac{n+1}{2n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) احسب : v_0 و v_1 و v_2 و v_3 ثم u_0 و u_1 و u_2 و u_3 .

2) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\geq 5$ و أن $(\forall n\in\mathbb{N});v_n\leq 1$

{ تعريف المتتالية المصغورة – المكبورة – المحدودة }

3) نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي : $u_n=\frac{1}{n}$ و $v_n=2Cosn+3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودتان .

تعريف

- **نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M بحيث :** $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\leq M$.
- **نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m بحيث :** $(\forall n\in\mathbb{N});m\leq u_n$.
- **نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة .**

تمرين 02

1 / بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة بالعدد M في الحالات التالية :

$$(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\sqrt{1+\frac{3}{n+1}}\ ;\ M=2 \quad \triangleright\triangleleft \quad (\forall n\in\mathbb{N});u_n=\frac{2n}{n^2+1}\ ;\ M=1$$

2 / بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in I}$ مصغورة m في الحالات التالية :

$$(\forall n\in\mathbb{N});v_n=n^2+5n\ ;\ m=-7 \quad \triangleright\triangleleft \quad (\forall n\in\mathbb{N});v_n=\frac{3n+2}{n+1}\ ;\ m=2$$

3 / نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=\frac{2}{3} \\ u_n=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{8} \end{cases}$ بين بالترجع أن: $(\forall n\in\mathbb{N});\frac{1}{2}\leq u_n\leq\frac{2}{3}$.

ملاحظة

✓ إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جميع حدودها موجبة فإنها مصغورة بالعدد صفر " 0" .

✓ إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جميع حدودها سالبة فإنها مكبورة بالعدد صفر " 0".

خاصية

تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية محدودة إذا وفقط إذا وجد α من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $\forall n\in\mathbb{N};|u_n|\leq\alpha$

5) رتابة متتالية عددية

نشاط

لتكن المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=(n+1)(n+2)$

1/ i / احسب : u_0 و u_1 و u_2 و u_3

ii / رتب الأعداد u_0 و u_1 و u_2 و u_3 تزايديا

iii / احسب بدلالة n العدد $u_{n+1}-u_n$ ثم استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}>u_n$

2/ i / احسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بدلالة n ثم بين أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$

{ تعريف المتتالية المصغورة – المكبورة – المحدودة }

ii / استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا

تعريف

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .

- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية (تزايديا قطعا) إذا وفقط إذا كان :
$\forall(n;m)\in I^2; n>m \Rightarrow u_n \geq u_m$ $\left(\forall(n;m)\in I^2; n>m \Rightarrow u_n > u_m\right)$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية (تناقصية قطعا) إذا وفقط إذا كان :
$\forall(n;m)\in I^2; n>m \Rightarrow u_n \leq u_m$ $\left(\forall(n;m)\in I^2; n>m \Rightarrow u_n < u_m\right)$.
- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2 u_n = u_m$

خاصية 1

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية .

- نقول إن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}\geq u_n$ وتزايدية قطعا إذا كان $\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1} > u_n$.
- نقول إن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}\leq u_n$ وتناقصية قطعا إذا كان $\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1} < u_n$

تمرين 03

ادرس رتابة المتتاليات التالية :

$$(\forall n\in\mathbb{N}), T_n = \frac{n}{2^n} \;;\; (\forall n\in\mathbb{N}), w_n = \sqrt{n^2+4} \;;\; (\forall n\in\mathbb{N}), v_n = 2^n \;;\; (\forall n\in\mathbb{N}), u_n = \frac{2}{n+1}$$

خاصية 2

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية حدودها موجبة قطعا .

- تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية إذا وفقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ وتزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان: $\forall n\in\mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
- تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية إذا وفقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$ وتناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

تمرين 04

ادرس رتابة المتتاليات العددية التالية :

$$(\forall n\in\mathbb{N}), c_n = \sqrt{n-1}-\sqrt{n+1} \;;\; (\forall n\in\mathbb{N}), b_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} \;;\; (\forall n\in\mathbb{N}), a_n = \frac{n}{3^n}$$

تمرين 05

1/ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2} \;;\; n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ/ بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}; -1<u_n<0$.

ب/ بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة قطعا ؛ ثم استنتج أنها مكبورة بالعدد $-\frac{1}{2}$

2/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n+4} \;;\; \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ/ بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}; v_n\geq 0$.

ب/ بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .

II) المتتاليات الحسابية

1) نشاط

1/ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N};u_n=2n-1$.

i / تحقق من أن $u_2=u_1+2$ و $u_3=u_2+2$ و $u_4=u_3+2$

ii / تظنن علاقة بين u_{21} و u_{20} و u_{2008} و u_{2007}

iii / بين أن : $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}-u_n=2$.

2/ لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول v_0 وبالعلاقة $v_{n+1}-v_n=r$ حيث r عدد حقيقي معلوم .

i / اكتب v_1 و v_2 بدلالة v_0 و r

ii/ بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=v_0+nr$. واستنتج أن : $v_n=v_p+(n-p)r$ بحيث : $n\geq p$.

تعريف

> **ليكن p عددا صحيحا طبيعيا .**
> **تكون متتالية $(u_n)_{n\geq p}$ حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : لكل $n\geq p$**
> **لدينا : $u_{n+1}=u_n+r$ أي $u_{n+1}-u_n=r$.**
> **العدد r يسمى أساس المتتالية : $(u_n)_{n\geq p}$**

ملاحظات :

- ✓ العدد **r** ثابت أي غير مرتبط بـ **n** .
- ✓ المرور من الحد u_k إلى الحد u_{k+1} يتم بإضافة العدد **r** .

أمثلة :

- ➢ المتتالية : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث : $u_n=3n+5$ ، متتالية حسابية أساسها $r=3$ لأن : $u_{n+1}-u_n=3$.
- ➢ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بما يلي : $u_n=\frac{2}{3}n-4$

لدينا : $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}(n+1)-4-\frac{2}{3}n+4$ إذن : $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}$

ومنه فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية ؛ أساسها $r=\frac{2}{3}$ و حدها الأول هو $u_0=-4$.

- ➢ إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=9$ فإن : $u_1=u_0+(-2)=7$

و $u_2=u_1+(-2)=5$ و $u_3=u_5+(-2)=3$ و هكذا ....

2) صيغة الحد العام لمتتالية حسابية

خـــاصية

> **إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r فإن :** $(\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2);\ \mathrm{u_n}=u_p+(n-p)r$

حالة خاصة

$u_n=u_0+nr$ و $u_n=u_1+(n-1)r$

تمرين 06

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1/ بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n\neq-1$

2 / نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

i / بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول .   ii / احسب v_n ثم u_n بدلالة n

3) خاصية مميزة لمتتالية حسابية : الوسط الحسابي

نشاط

لتكن $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية أساسها r

i / اكتب u_{n+1} بدلالة u_n و r و u_{n+2} بدلالة u_{n+1} و r

ii / بين أن $2u_{n+1}=u_n+u_{n+2}$

iii / لتكن $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية عددية ؛ بحيث : $2u_{n+1}=u_n+u_{n+2}$ لكل $n\geq p$.

✓ بين أنه يوجد عدد حقيقي r بحيث $\forall n\geq p;\ u_{n+1}-u_n=r$

✓ استنتج أن $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية

خاصية

$(u_n)_{n\geq p}$ **متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان :** $(\forall n\geq p)\ ;\ 2u_{n+1}=u_n+u_{n+2}$

بتعبير آخر

تكون الأعداد a **و** b **و** c **بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان**
B هو الوسط الحسابي للعددين a و c أي : $2b=a+c$

تمرين 07

1) a و b و c ثلاثة أعداد تكون في هذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية وتحقق : $\begin{cases} a+b+c=39 \\ a^2+b^2+c^2=525 \end{cases}$

حدد a و b و c .

2) ليكن x عددا حقيقيا ولتكن الأعداد $(2x-1)$ و $(x-3)$ و $\frac{2x+1}{3}$ في هذا الترتيب ثلاثة حدود متتابعة في متتالية حسابية (u_n)

أ / حدد العدد x .

ب / حدد أساس المتتالية (u_n)

4) خاصية مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية .

نشاط

I) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_1

نضع : $S_n=u_1+u_2+....+u_n$

i / تحقق من أن : $s_n=u_1+(u_1+r)+(u_1+2r)+(u_1+3r)+...+(u_1+(n-1)r)$

ii / اكتب $\frac{n}{2}(u_1+u_n)$ بدلالة u_1 و n و r

iii / استنتج أن : $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_2)$ ؛ ثم احسب S_{20} و S_{2007} إذا علمت أن $u_1=1$ و $r=2$

II) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

i / بين بالترجع أن : $\forall\in\mathbb{N};u_n=u_0+nr$

ii / نضع : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$

✓ ما عدد حدود هذا المجموع ؟

✓ بين أن $S_n=(n+1)\left(\frac{2u_0+nr}{2}\right)$

✓ استنتج أن : $S_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

خاصية

إذا كانت $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية حسابية فإن لكل n و p من $\mathbb{N}$ بحيث $p<n$:

$$u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+.....+u_n=(n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$$

أي أن مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية يساوي: $\left(\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right)\times(\text{عدد الحدود})$

تمرين 08

1) احسب بدلالة n المجاميع التالية :

$$B=2+4+6+8+...+(2n+2)\ ;\ A=1+3+5+7+...+(2n+1)$$

2) احسب ما يلي :

$$B=2+4+6+8+...+2008\ ;\ A=1+3+5+7+...+2007$$

تمرين 09

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

1 / احسب u_1 و u_2 و u_3 . هـل المتتالية (u_n) حسابية ؟

2 / أثبت بالترجع أنه لكل عدد صحيح طبيعي : $S=u_0+u_1+u_2+...+u_n=\dfrac{n}{n+1}$

3 / استنتج قيمة المجموع : $S'=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+...+\dfrac{1}{2007\times2008}$

III) المتتاليات الهندسية

نشاط

1/ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N};u_n=(2007)^n$.

i / احسب $\dfrac{u_1}{u_0}$ و $\dfrac{u_2}{u_1}$ و $\dfrac{u_3}{u_2}$

ii / تظن علاقة بين u_{21} و u_{20} و u_{69} و u_{68}

iii / بين أن : $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}=(2007)u_n$.

2/ لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول v_0 وبالعلاقة $v_{n+1}=qv_n$ حيث q عدد حقيقي معلوم .

i / بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة في حالة $q=1$ أو $v_0=0$.

ii/ بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=q^nv_0$. واستنتج أن: $v_n=q^{n-p}v_p$ لكل $n\geq p$.

1) تعريف :

نقول عن متتالية (u_n) أنها هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}=qu_n$.
العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n)

نتائج :

- ✓ إذا كان أساس متتالية هندسية منعدما فإن جميع حدودها ابتداء من الحد الثاني تكون منعدمة .
- ✓ إذا كان الحد الأول من متتالية هندسية منعدما فإن جميع حدودها تكون منعدمة
- ✓ إذا كان أساس متتالية هندسية يساوي 1 فإن جميع حدود هذه المتتالية مساوي للحد الأول
- ✓ إذا كانت جميع حدود المتتالية الهندسية (u_n) غير منعدمة فيمكن تعريفها على الشكل التالي : $\begin{cases}u_0=a\\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q\end{cases}$

تمرين 10

1 / نعتبر المتتالية (v_n) بحيث : $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=\frac{3^n}{5^n+1}$. بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا حدها الأول v_0 و أساسها q.

2 / نعتبر المتتالية (u_n) بحيث : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=7^n\times 5$. بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا حدها الأول u_0 و أساسها q.

3/ أعط الخمس الحدود الأولى للمتتالية الهندسية التي حدها الأول $u_0=3$ وأساسها $q=2$.

4 / احسب الحد الرابع من المتتالية الهندسية التي حدها الأول هو $u_0=-2$ و أساسها $q=\frac{1}{4}$

ملاحظات :

- ✓ (u_n) متتالية هندسية أساسها q يعني أن المرور من حد إلى الحد الذي يليه نضربه في العدد q
  $u_1=q.u_0$; $u_2=q.u_1$; $u_3=q.u_2$;.......
- ✓ للبرهنة على أن (u_n) متتالية هندسية ؛نحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونبين أنه يساوي عددا غير مرتبط ب n
- ✓ (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم :
  - ❖ إذا كان $q>1$ فإن (u_n) متتالية تزايدية .
  - ❖ إذا كان $0<q<1$ فإن (u_n) متتالية تناقصية .
  - ❖ إذا كان $q=1$ فإن (u_n) متتالية ثابتة .

2) صيغة الحد العام لمتتالية هندسية

نشاط

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

1/ اكتب : u_1 و u_2 و u_3 و u_4 بدلالة q و u_0

2 / بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n=u_0\times q^n$

3 / بين نفس نتيجة 2 / إذا كان الحد الأول هو : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_p

خاصية :

> **إذا كانت $(u_n)_{n\geq p}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_p فإن $u_n=u_p\times q^{n-p}$ لكل $n\geq p$**

ملاحظات :

- ✓ إذا كان $p=0$ فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n=u_0\times q^n$
- ✓ إذا كان $p=1$ فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):u_n=u_1\times q^{n-1}$

تمرين 11

1 / لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=4$ و أساسها ؛ $q=-2$. احسب u_5 ; u_9 ; u_{13} ; u_{20}

2 / حدد العدد الحقيقي الموجب q أساس المتتالية الهندسية (v_n) بحيث : v_0 و $v_4=27v_2$

3 / حدد w_0 الحد الأول للمتتالية الهندسية (w_n) علما أن أساسها q هو 2 و أن حدها السادس هو : 160

3) خاصية مميزة (الوسط الهندسي)

نشاط

1/ a و b و c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q . بين أن $b^2=a\times c$

2 / ***عكسيا*** إذا كانت الأعداد a و b و c حدودا بحيث : $b^2=a\times c$. بين أن a و b و c في هذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية محددا أساسها .

خاصية

> **تكون الأعداد غير المنعدمة a و b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان b وسطا هندسيا للعددين a و c أي : $b^2=a\times c$**

4) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

نشاط

I / لتكن $(S_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية بحيث أن $S_n = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n$

1) نفترض أن $q \neq 1$

i / احسب $S_2 - qS_2$ ثم استنتج أن $S_2 = \dfrac{1-q^3}{1-q}$

ii / احسب $S_n - qS_n$ ثم استنتج أن $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2) نفترض $q = 1$ احسب S_n

II / لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q. نضع : $S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+2} + \ldots + u_n$

1) تحقق من أن $S = u_p + q u_p + q^2 u_p + q^3 u_p + \ldots + q^{n-p} u_p$.

2) استنتج أن $S = u_p . \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ ؛ إذا علمت أن $q \neq 1$

3) احسب المجموع S في حالة q = 1 .

4) نضع $S = v_{11} + v_{12} + v_{13} + \ldots + v_{59}$ احسب S إذا علمت أن q = 3 و $v_{11} = 2$

خاصية

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم . نضع : $S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+2} + \ldots + u_n$ حيث $(n \geq p)$

لدينا : ❖ إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_p \times \left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.

❖ إذا كان $q = 1$ فإن $S = (n-p+1) \times u_p$

حالة خاصة

❖ إذا كان $q \neq 1$ فإن :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_0 \left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \quad \text{و} \quad S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_1 \left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$$

بصفة عامة

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية يساوي :
$$\boxed{S = (\text{الحد الأول}) \times \left(\dfrac{1-(\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1-(\text{الأساس})}\right)}$$

تمرين 12

I) احسب مايلي :

$S_1 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{5000}$ و $S_2 = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{3^5}$ و $S_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{64}$

II) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n \end{cases}$

1) احسب v_1 و v_2

2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \dfrac{3}{2^n}$

3) احسب المجموع : $S = v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_{21}$