تمرين1

1. ادرس تغيرات الدالة $x \mapsto e^x - x - 1$ واستنتج ان $\forall x \in IR\ e^x \geq x+1$.
2. ليكن $r \in [0,+\infty[$.
ادرس تغيرات الدالتين $x \mapsto e^{x^r} - 1$ و $x \mapsto e^{x^r} - x^r - 1$
3. استنتج ان $\forall r \succ 0\quad \forall x \geq 0\quad e^{x^r} \geq x^r + 1$.

تمرين2

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .
2. ادرس اتصال f على اليمين في الصفر.
3. ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر واول مبيانيا النتيجة المحصلة.
4. ادرس تغيرات الدالة f وضع جدول تغيراتها.
5. ادرس الفرع الانهائي لمنحنى f .
6. ارسم منحنى f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم.

تمرين3

1. نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي $g(x) = 1 + \ln x.\ln(\ln x)$.
ادرس تغيرات الدالة g .
2. لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي

$$f(x) = \begin{cases} (\ln x)^x, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

أ. حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب. اكتب $f(x)$ مستعملا الدالة الاسية النبيرية لكل x من D .

ت. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ث. بين ان f متصلة في العدد1 على اليمين.

ج. بين ان $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1$ (يمكن استعمال تغيير المتغير $x = 1+h$ والنتيجة $\ln(1+h) \approx h$ بجوار الصفر) واول النتيجة السابقة مبيانيا.

ح. مستعملا 1. بين ان f تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$.

خ. بين ان $\forall x \succ 1\quad \ln\dfrac{f(x)}{x} = x\ln(\ln x) - \ln x$ ثم بين ان منحنى f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب بجوار $+\infty$

د. حدد معادلة للمماس لمنحنى f عند النقطة دات الافصول e وارسم هدا المنحنى في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم.

تمرين4 (2006 د.ا. تمرين5)

لكل عدد صحيح طبيعي n حيث $n \geq 2$ نعتبر الدالة المعرفة بما يلي $f_n(x) = \dfrac{x}{n} - e^{-nx}$ و (C_n) منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.ا. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$.

ب. ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n) .

2. احسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

3.ا. بين ان المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.

ب. بين ان $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \prec 0$.

ج. بين ان $\forall x \in IR\quad e^x \geq x+1$. استنتج ان $f_n(1) \succ 0$.

د. بين ان $\dfrac{1}{n} \prec \alpha_n \prec 1$.

4. ارسم (C_2) خد $\alpha_2 \approx 0.6$.

5.ا. بين ان $\forall n \geq 2\quad f_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \dfrac{1}{n} - 1\right)$.

ب. استنتج ان $\forall n \geq 2\quad f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$.

ج. بين ان المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية ثم استنتج انها متقاربة.

6.ا. باستعمال السؤال 3. د . بين ان $\forall n \geq 2\quad \dfrac{1}{n^2} \prec e^{-n\alpha_n} \prec \dfrac{1}{n}$.

ب. استنتج ان $\forall n \geq 2\quad \dfrac{\ln n}{n} \prec \alpha_n \prec \dfrac{2\ln n}{n}$.

ج. حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

تمرين5

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ و (C) منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.ا. ادرس الفرعين اللانهائيين .

ب. بين ان f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $f'(x)$ ثم اعط جدول تغيرات f .

ج. احسب $f''(x)$ وبين ان المعادلة $f''(x) = 0$ تقبل حلين 1 و β حيث $\dfrac{-1}{5} \prec \beta \prec 0$.

د. استنتج نقط انعطاف (C) ثم ارسمه.

2.ا. بين ان f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$. ليكن g التقابل العكسي للدالة f

ب. بين ان g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ثم اعط منحى تغيراتها واحسب النهايتين $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.

ج. بين ان $\forall n \geq 1\quad \exists! \alpha_n \prec 0 : g\left(\dfrac{1}{n}\right) = \alpha_n$.

د. احسب α_1 وحدد منحى تغيرات المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.

ه. بين ان المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ ليست مصغورة ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

تمرين6

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر الدالة المعرفة بما يلي

$(\forall x\in IR)\ g_n(x)=1+e^{nx}(nx-1)$

1. ادرس تغيرات الدالة g_n وحدد النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$
2. استنتج أن $(\forall x\in IR)\ e^{nx}(nx-1)+1\geq 0$
3. ا. برهن أن $\forall x\prec 0\ \ 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\prec e^x\prec 1+x+\frac{x^2}{2}$

ب. استنتج أن $\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$

4. نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{e^{nx}}{nx}-\frac{1}{nx}-1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

وليكن (C_n) منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم .

أ. ادرس اتصال واشتقاق f_n عند 0.

ب. ادرس الفرعين اللانهائيين ل (C_n) .

ت. لتكن f_n' الدالة المشتقة للدالة f_n . بين ان

$$\forall x\in IR^*\ \ f_n'(x)=\frac{g_n(x)}{nx^2}$$

ث. ضع جدول تغرات f_n .

ج. ادرس الوضعيين النسبيين للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

ح. حدد معادلة المماس ل (C_n) عند النقطة دات الافصول e .

خ. ارسم (C_1) و (C_2) .

تمرين7

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $\forall x\in IR\ \ f(x)=\frac{e^{xArc\tan x}}{\sqrt{1+x^2}}$. وليكن (C)
منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. بين ان f دالة زوجية.
2. ا. بين ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=0$.

ب. تاكد ان $\forall x\in IR\ \ f(x)=e^{xArc\tan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$.

ج. استنتج ان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3. ا. بين ان (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب بجوار $+\infty$.

ب. استنتج الفرع اللانهائي المتبقي للمنحنى (C) .

4. بين ان $\forall x\in IR\ \ f'(x)=Arc\tan(x).f(x)$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f .

5. ادرس تحدب المنحنى (C) .
6. برهن ان $\forall x\geq 0\ \ Arc\tan x\geq x-\frac{x^3}{3}$ وان $\forall x\geq 0\ \ \ln(1+x)\leq x$ وان $\forall x\in IR\ \ e^x\geq 1+x$.
7. نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي $\forall x\in IR\ \ g(x)=-\frac{x^4}{3}+\frac{x^2}{2}+1$.

بين أن g تنعدم في عددين متقابلين احدهما α يحقق $\frac{3}{2}\prec\alpha\prec 2$.

8. برهن ان $\forall x\in IR\ \ f(x)\geq g(x)$ وأول مبيانيا هده النتيجة.
9. ارسم (C) ومنحنى g
10. نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي $\forall n\geq 1\ \ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{e^{kArc\tan\frac{k}{n}}}}{\sqrt{n^2+k^2}}$

بين ان $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة وان $0\leq\lim_{n\to+\infty}u_n\leq\sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}$.

تمرين8

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر الدالة المعرفة بما يلي
$(\forall x\in I)\ f_n(x)=e^{-nx}\ln x$ حيث $I=]0,+\infty[$ وليكن (C_n)
منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. ولتكن
g_n الدالة المعرفة بما يلي $(\forall x\in I)\ g_n(x)=\frac{1}{x}-n\ln x$.

1. ا. ادرس تغيرات الدالة g_n

ب. بين ان المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n في I حيث $1\prec u_n\prec 2$

ج. استنتج اشارة g_n على المجال I

2. ادرس الفرعين اللا نهائيين للمنحنى (C_n)
3. بين ان $\forall x\in I\ \ f_n'(x)=e^{-nx}g_n(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f_n
4. بين ان $0\prec f_n(u_n)\prec\frac{1}{n}$
5. برهن ان $\forall x\in I\ \ \lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$
6. برهن ان $\forall n\geq 1\ \ u_{n+1}\prec u_n$ وادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$
7. ا. بين ان

$$\forall x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]\ \ x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

ب. استنتج ان $\forall n\geq 1\ \ u_n\prec 1+\frac{1}{n}$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty}u_n$

8. بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة مشتركة ينبغي تحديد إحداثيتيها
9. ا. اوجد معادلة للمماس (T_n) للمنحنى (C_n) عند النقطة ذات الافصول1.

ب. ليكن v_n المعامل الموجه للمستقيم (T_n) . بين ان المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ هندسية وحدد اساسها واحسب نهايتها ثم اول النتيجة المحصلة مبيانيا.

10. ارسم (C_1) و (C_2) مع المماسين (T_1) و (T_2) . خذ $\|\vec{i}\|=4cm$ و

$e \approx 2.7$ و $\sqrt{e} = 1.6$ و $u_1 \approx 1.8$ و $u_2 \approx 1.5$.

Exercice A8

Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x\,e^{-x}$; $g(x) = f(x) + [f(x)]^2$

Partie A - Étude de la fonction f

1°) a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
Étudier le sens de variation de f.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.

c) Donner le tableau de variation de f.
(On ne demande pas de construire la représentation graphique de f).

2°) a) Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution, notée α.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

b) Montrer de même que l'équation $f(x) = -1$ admet, dans $\mathbb{R}$, une unique solution, notée β.
Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Partie B - Étude de la fonction g

1°) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $g'(x) = f'(x)\,[1 + 2f(x)]$.
Étudier le sens de variation de g.

2°) Déterminer la limite de g en $+\infty$ et sa limite en $-\infty$.

3°) Donner le tableau de variation de g. On calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$.

4°) a) Établir que, pour tout réel x, on a : $g(x) - x = x\,e^{-x}\,[1 + x\,e^{-x} - e^{x}]$

b) Montrer que, pour tout x réel, on a : $1 + x\,e^{-x} \leqslant 1 + x \leqslant e^{x}$

c) Préciser la position de la courbe représentative Γ de la fonction g par rapport à sa tangente T en O.

5°) Tracer Γ (on prendra pour unité graphique 2 cm). Préciser les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Faire figurer sur le dessin la tangente T.

PROBLEME : (10 points)

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

A –1) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

a – Dresser le tableau de variation de g_n

b – Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α_n .

c – Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$.

d – En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x\,e^x}{n + e^x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a – Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f_n(x) - x\right]$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_n$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

b – Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'_n(x) = \dfrac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

c – Montrer que $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$.

d – Donner le tableau de variation de f_n .

3) a – Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_n$ et de la droite D d'équation $y = x$.

b – Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

c – Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

(On prendra 2 cm pour unité de longueur ; on donne $\alpha_1 \simeq -1{,}4$, $\alpha_2 \simeq -1{,}2$).

Exercice B1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie A : Étude de fonctions auxiliaires

1°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x + 1$.
Étudier le sens de variation de h et démontrer que $h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Étudier le sens de variation de g et dresser le tableau des variations de g.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On note α et β ces solutions, avec $\alpha > \beta$. Prouver que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$

d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

1°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

2°) a) Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x\,g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.

3°) a) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A)2°), déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5°) a) Établir que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$f(x) - x = \dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$

b) Étudier le sens de variation de la fonction u .
En déduire le signe de $u(x)$.

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

6°) Tracer (C) et (T).
On prendra pour unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.
On pourra admettre que $-1{,}85 < \beta < -1{,}84$ et $-1{,}19 < f(\beta) < -1{,}18$.

Exercice 10 *Moyennes arithmétique et géométrique. Comparaison*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

On appelle moyenne arithmétique des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le réel A défini par :

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

On appelle moyenne géométrique des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le réel G défini par :

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Le but de l'exercice est de prouver que : $G \leqslant A$

1. Démontrer que pour tout réel x : $e^{x-1} \geqslant x$

2. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $e^{\frac{a_i}{A} - 1} \geqslant \dfrac{a_i}{A}$

3. En déduire que : $1 \geqslant \dfrac{G^n}{A^n}$

Conclure.