تصحيح الإمتحان الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2010

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها

مادة :الرياضيات

التمرين الأول:

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(4,0,-3)$ و $\overrightarrow{AC}(8,1,-6)$ إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 8\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 8\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+4\vec{k}$$

تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)+4(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+4z-9=0$$

ومنه $(ABC):\ 3x+4z-9=0$

2) لدينا معادلة الفلكة S هي: $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

إذن

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+z^2-15=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25$$

وبالتالي :الفلكة (S) مركزها $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها $r=5$.

3) أ–المستقيم (Δ) موجه بالمتجهة المنظمية على المستوى (ABC)أي بِـ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ويمر من$\Omega(3,1,0)$

إذن النظمة : $\begin{cases}x=3+3t\\ y=1 \qquad t\in\mathbb{R}\\ z=4t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

ب–لنحسب مسافة $\Omega(3,1,0)$ عن المستقيم (Δ) . بما أن $\Omega\in(\Delta)$ فإن $d\left(\Omega;(\Delta)\right)=0<r$ ومنه (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين متماثلتين بالنسبة للنقطة Ω .

$$M(x,y,z)(S)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25\\ x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25\ (1)\\ x-3=3t\\ y-1=0\\ z=4t\end{cases}$$

لدينا

$$(1) \Leftrightarrow 9t^2 + 16t^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ أو } t = -1$$

وبالتالي $(S) \cap (\Delta) = \left\{ E(6,1,4) ; F(0,1,-4) \right\}$.

التمرين الثاني :

1) لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $z^2 - 6z + 10 = 0$.

لدينا :

$$z^2 - 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-3)^2 = i^2$$

$$\Leftrightarrow z - 3 = i \text{ أو } z - 3 = -i$$

$$\Leftrightarrow z = 3 + i \text{ أو } z = 3 - i$$

وبالتالي $S = \left\{ 3+i \; ; \; 3-i \right\}$

2) أ- التمثيل العقدي للدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه $\mathcal{A}$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ هو :

لتكن $\mathcal{M}'(z')$ صورة $\mathcal{M}(z)$ بالدوران $\mathcal{R}$ إذن:

$$z' - a = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}(z-a) \Leftrightarrow z' - (3-i) = i\left(z - (3-i)\right)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - 3i - 1 + 3 - i$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 2 - 4i$$

ب-لتكن c' لحق النقطة C' صورة C بالدوران $\mathcal{R}$ إذن:

$$c' = ic + 2 - 4i$$

$$= i(7-3i) + 2 - 4i$$

$$= 5 + 3i$$

ج-

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i} = \frac{2+2i}{4-4i}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2i}{2}\right) = \frac{1}{2}i$$

ومنه:

$$\begin{cases} Arg\left(\dfrac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\dfrac{c'-b}{c-b}\right| = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\dfrac{c'-b}{c-b}\right| = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ |c-b| = 2|c'-b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ BC = 2.BC' \end{cases}$$

وبالتالي : المثلث BCC' قائم الزاوية في B وأن $BC = 2BC'$.

التمرين الثالث:

الصندوق يحتوي على 10 كرات ، نسحب تآنيا 4 كرات من الصندوق .

كل عنصر من كون الإمكانيات Ω هو تأليفة لِـــ 4 كرات من بين 10 كرات التي يحتوي عليها الصندوق .

وبالتالي : $card\Omega = C_{10}^{4} = 210$.

1) الحدث A : "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط"

الحدث A محقق إذا تم اختيار كرة واحدة حمراء من بين 3 كرات حمراء و

3 كرات من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق

إذن : $card\ A = C_{3}^{1} \times C_{7}^{3} = 3 \times 35 = 105$ وبالتالي $p(A) = \dfrac{card\ A}{card\ \Omega} = \dfrac{105}{210} = \dfrac{1}{2}$.

الحدث B :"الحصول على كرة بيضاء على الأقل"

لدينا الحدث $\overline{B}$:"عدم الحصول على كرة بيضاء"

الحدث $\overline{B}$ محقق إذا تم اختيار 4 كرات من بين 5 كرات غير البيضاء الموجودة في الصندوق .

إذن $card\ \overline{B} = C_{5}^{4} = 5$ وبالتالي $p(\overline{B}) = \dfrac{card\ \overline{B}}{card\ \Omega} = \dfrac{C_5^4}{C_{10}^4} = \dfrac{5}{210} = \dfrac{1}{42}$

وبالتالي : $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \dfrac{1}{42} = \dfrac{41}{42}$.

2) أ-الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء ومنه كل سحبة لِـــ 4 كرات من الصندوق تحتوي على :

ثلاث كرات حمراء أو كرتين حمراوتين أو كرة واحدة حمراء أو لاتحتوي على أية كرة حمراء.

ومنه مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي: 3 أو 2 أو 1 أو 0 .وبالتالي : $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$.

ب-حساب $p(X=2)$

الحدث $(X=2)$ محقق ، إذا تم اختيار كرتين حمراوتين من بين الكرات الثلاث الحمراء

وكرتين من بين 7 كرات غير الحمراءالموجودة في الصندوق. ومنه $card\ (X=2) = C_3^2 \times C_7^2 = 3 \times 21 = 63$

وبالتالي : $p(X=2) = \dfrac{card\ (X=2)}{card\Omega} = \dfrac{63}{210} = \dfrac{3}{10}$

حساب $p(X=0)$

الحدث $(X=0)$ محقق ، إذا تم اختيار 4 كرات من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق.

إذن $card(X=0)=C_7^4=35$ وبالتالي: $p(X=0)=\dfrac{card(X=0)}{card\,\Omega}=\dfrac{35}{210}=\dfrac{1}{6}$.

ج-لدينا $p(X=1)=p(A)=\dfrac{1}{2}$.

الحدث $(X=3)$ محقق ، إذا تم اختيار الكرات الحمراء الثلاث وكرة من بين 7 كرات غيرالحمراء الموجودة في الصندوق.

إذن $card(X=3)=C_3^3\times C_7^1=7$

وبالتالي : $p(X=3)=\dfrac{card(X=3)}{card\,\Omega}=\dfrac{7}{210}=\dfrac{1}{30}$.

قانون احتمال المتغير العشوائي X .

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-1}{2u_n}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

1) لنبين بالترجع أن : $u_n-1>0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

لدينا $u_0=2$ إذن $u_0-1>0$ وبالتالي المتفاوتة $u_n-1>0$ صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n-1>0$ ونبين أن $u_{n+1}-1>0$.

$u_{n+1}-1=\dfrac{3u_n-1}{2u_n}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n}$ بما أن $u_n-1>0$ (إفتراض الترجع) فإن $u_{n+1}-1>0$.

ومنه $u_n-1>0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي: $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

أ-لنبين أن (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{3u_n-1}{2u_n}-1}{2\dfrac{3u_n-1}{2u_n}-1}=\frac{\dfrac{u_n-1}{2u_n}}{\dfrac{4u_n-2}{2u_n}}=\frac{u_n-1}{4u_n-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{2u_n-1}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن $v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-1}{2u_0-1}=\dfrac{1}{3}$.

نعلم أنه : $v_n=v_0\times q^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ إذن $v_n=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

ب- ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}\Leftrightarrow v_n(2u_n-1)=u_n-1\Leftrightarrow 2u_nv_n-v_n=u_n-1$$

$$\Leftrightarrow u_n(2v_n-1)=v_n-1\Leftrightarrow u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$$

إذن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$

لدينا $1<\frac{1}{2}<0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n-1}{2v_n-1}=1$.

3) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ و الدالة $x\mapsto \ell n x$ متصلة في $x_0=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\ell n(u_n)=\ell n(1)=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$.

التمرين الخامس:

I)

1) لدينا g دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=\left(1+4xe^{2x}\right)'=4\left(e^{2x}+2xe^{2x}\right)=4(2x+1)e^{2x}$

ومنه $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$.

2) لدينا إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $2x+1$ ومنه :

على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ لدينا $g'(x)\geq 0$ ومنه g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ لدينا $g'(x)\leq 0$ ومنه g تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

3) أ- لدينا $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1+4\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\left(2\times-\frac{1}{2}\right)}=1-2e^{-1}=1-\frac{2}{e}$.

بما أن $e>2$ فإن $\frac{2}{e}<1$ ومنه $1-\frac{2}{e}>0$ وبالتالي $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$.

ب-من تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تقبل قيمة دنيا عند $-\frac{1}{2}$ ومنه $(\forall x\in\mathbb{R})\ g(x)\geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$

وبالتالي : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)>0$.

II) $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$

1) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x.e^{2x}+x+1-e^{2x}=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}2x.e^{2x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty$.

2) لدينا f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x)=2e^{2x}+2e^{2x}(2x-1)+1$$
$$=1+4xe^{2x}=g(x)$$

وبما أن $g(x)>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$ فإن $f'(x)>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$ ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x}.e^{2x}+\dfrac{x+1}{x}=+\infty$.

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.

نتيجة: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب . (الجزء الموجب)

ب-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$

لدينا
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}e.(2x-1)e^{2x-1}=0$$
لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}2x-1=-\infty$.

نتيجة:المستقيم $(\Delta):\ y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

ج-لدينا $f(x)-(x+1)=(2x-1).e^{2x} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$.

وبالتالي وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) مرتبطة بإشارة $2x-1$.

-إذا كان $x=\dfrac{1}{2}$ فإن (Δ) يقطع $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

-إذا كان $x>\dfrac{1}{2}$ فإن $2x-1>0$ ومنه $(\mathscr{C}_f)$ يوجد فوق المستقيم (Δ) .

- إذا كان $x<\dfrac{1}{2}$ فإن $2x-1<0$ ومنه $(\mathscr{C}_f)$ يوجد تحت المستقيم (Δ) .

4)

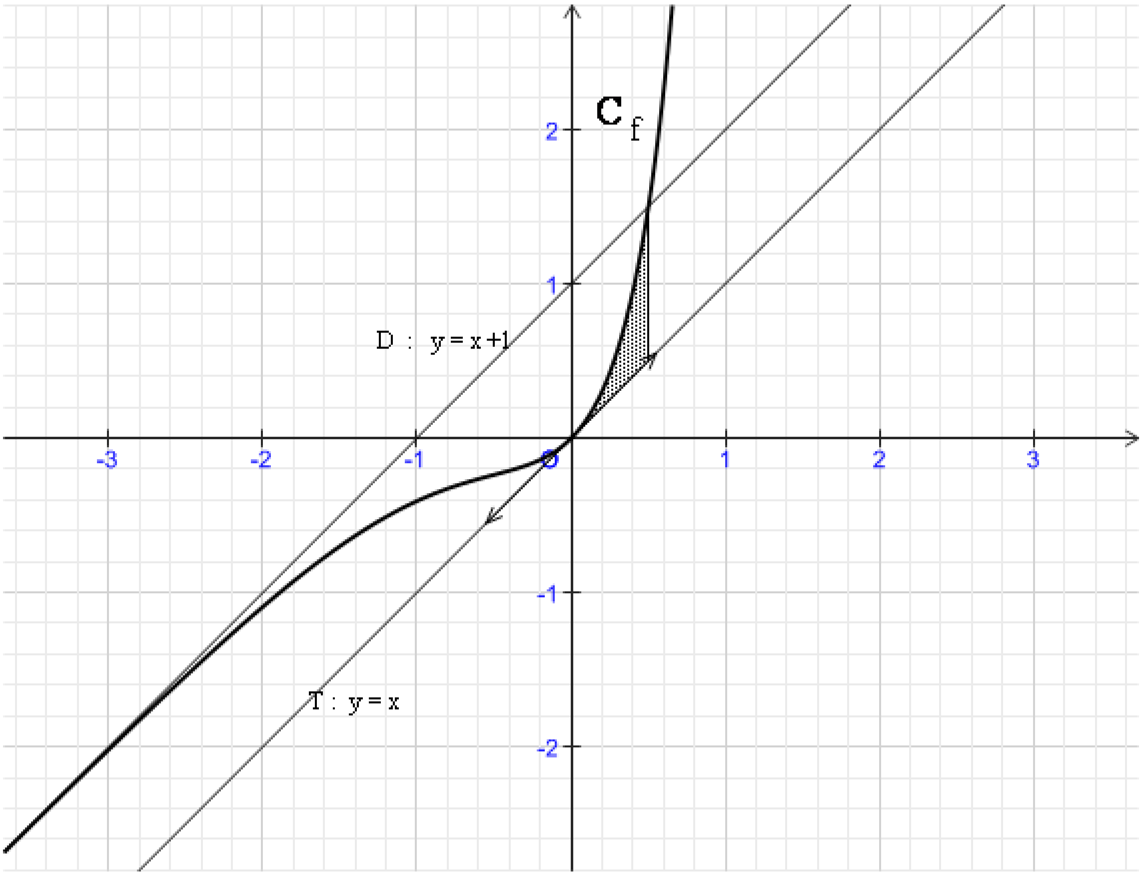
أ- لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ إذن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة O هي:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $(T):\ y=x$.

ب- لدينا f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f''(x)=4\left[e^{2x}+2xe^{2x}\right]=4(2x+1)e^{2x}$

بما أن f'' تنعدم في $x_0=-\dfrac{1}{2}$ مع تغيير إشارتها فإن النقطة من $(\mathscr{C}_f)$ التي أفصولها $-\dfrac{1}{2}$ نقطة انعطاف.

5) إنشاء المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$



6) أ-لنبين أن $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1-\frac{e}{2}$

نضع : $u(x)=2x-1$ و $v'(x)=e^{2x}$ إذن $u'(x)=2$ و $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ وبالتالي:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{e}{2}$$

ب-ليكن $x \geq 0$ نضع $h(x)=f(x)-x$ لدينا $h'(x)=f'(x)-1=g(x)-1=4xe^{2x} \geq 0$

وبما أن $h(0)=0$ فإن $h(x)\geq 0 \quad (\forall x \geq 0)$ وبالتالي $|f(x)-x| = f(x)-x \quad \left(\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$.

إذن مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم $(\mathcal{T})$ المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي:

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1+(2x-1)e^{2x}dx\right)\times 4cm^2 = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx\right)\times 4cm^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}+1-\frac{e}{2}\right)\times 4cm^2$$

$$= (6-2e)cm^2$$

Etabli par : Skri Mohammed (**lycée moussa bno noussaer khémisset-city**)