

# DEVOIR DE CONTRÔLE N°05 – Bac Sciences Maths B

Durée : 04 heures – Vendredi 1<sup>er</sup> mars 2024

➤ **Note :** l'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.  
La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
En particulier, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

- ✓ Le sujet se compose de trois exercices et d'un problème tous indépendants :
- Un exercice sur les nombres complexes questions à choix multiple.
  - Un exercice de synthèse sur les nombres complexes.
  - Un exercice sur la convergence et l'équivalent d'une suite définie par intégrale.
  - Un problème sur une fonction définie par intégrale et convergence d'une suite.

## ○ Exercice 01 : (02pts)

✓ Pour chacune des deux questions suivantes, cocher dans chaque cas les bonnes réponses.

### Question 01:

Une équation cartésienne de l'ensemble des points  $M(z)$  tel que :  $|z+1| = 2|z-1|$  est :

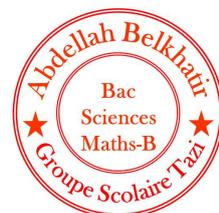
A	$y = x$
B	$9y = 9x - 11$
C	$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$
D	$(3x-5)^2 + 9y^2 = 16$

### Question 02:

Soit A et B les points d'affixes respectives :  $z_A = 1$  et  $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

L'affixe du point C tel que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A est :

A	$z_C = 1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$
B	$z_C = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}$
C	$z_C = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$
D	$z_C = 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}$



## ○ Exercice 02 : (4,5pts)

02 pts

I- On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$ , l'équation suivante :

$$(E) : 2z^2 + (3\sqrt{3} + i)z + 3 + i\sqrt{3} = 0.$$

0,5

1)- a)- Justifier que le discriminant de  $(E)$  est :  $\Delta = 2 - 2i\sqrt{3}$ .

0,75

b)- Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  en justifiant la réponse.

0,75

2)- Déterminer toutes les valeurs de l'entier  $n$  pour lesquels :  $(3 + i\sqrt{3})^n \in i\mathbb{R}$ .

II- Le plan complexe  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$ ;  $B$ ;  $C$  et  $D$  d'affixes respectives :

2,5 pts

$z_A = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ;  $z_B = -i$ ;  $z_C = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$  et  $z_D = -\sqrt{3}$ . On désigne par  $R$  la rotation de centre  $A$  telle que :  $R(D) = C$ .

0,5

1)- Montrer qu'une mesure de l'angle  $\theta$  de  $R$  est :  $\frac{\pi}{3}$ .

2)- Soit  $E$  le barycentre du système :  $\{(A, 2); (B, 2); (C, -3)\}$ .

0,75

✓ Montrer que :  $z_E = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ . Puis justifier que :  $R(B) = E$ .

0,75

3)- a)- Montrer que :  $\frac{z_B - z_A}{z_E - z_C} \in i\mathbb{R}$ . Puis en déduire la hauteur du triangle  $ABC$  issue du point  $C$ .

0,5

b)- Déterminer  $z_F$  l'affixe de  $F$  le point d'intersection de  $(AB)$  et  $(CE)$ .

## ○ Exercice 03 : (4,5pts)

⇒ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , On pose :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ .

0,75

1)- Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . Puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

0,75

2)- a)- En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); nI_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

0,5

b)- Montrer que :  $(\forall t \in \mathbb{R}^+); \ln(1+t) \leq t$ .

0,5

c)- En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |nI_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$ .

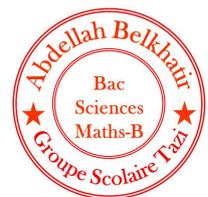
0,5

d)- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n.I_n$  en justifiant la réponse.

3)- Soit  $a \in \mathbb{R}^{**}$ .

0,5  
1

✓ Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n} dx = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n} dx = \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)$ .



## ○ Problème : (09pts)



3,5 pts

I- Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(0) = 2 \text{ et } f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{x}; \text{ si } x > 0.$$

0,25

1)- Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

0,75

2)- Justifier que  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

0,75

3)- a)- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[); f'(x) = \frac{e^{-2x}(2x+1) - 1}{x^2}.$$

0,75

b)- Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); e^{-2x}(2x+1) - 1 < 0$ .

Indication : On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$g : t \mapsto e^{-2t} \text{ sur le segment } [0; x], \text{ où } x \in ]0; +\infty[.$$

0,5

c)- En déduire la monotonie de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  et dresser son tableau de variation.

0,5

4)- Montrer que :  $(\forall t \in [1; +\infty[); \frac{1}{t} - e^{-2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ .

5,5 pts

II- Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$ .

0,5

1)- a)- Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); x.f(2x) \leq F(x) \leq x.f(x)$ .

0,75

b)- En déduire que  $F$  est dérivable à droite en 0 et préciser  $F'_d(0)$ .

0,75

2)- a)- Montrer que :  $(\forall x \in [1; +\infty[); \ln(2) - \frac{1}{2}(e^{-2x} - e^{-4x}) \leq F(x) \leq \ln(2)$ .

0,75

b)- En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

0,75

3)- a)- Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[); F'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-4x}}{x}.$$

0,5

b)- Dresser le tableau de variation de  $F$  en justifiant la réponse.

1,5

4)- Construire la courbe  $(C_F)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5)- On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

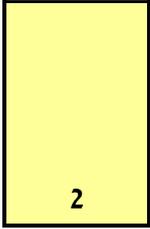
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); V_n = \sum_{k=0}^n f(n+k).$$

✓ Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f(2n) + F(n) \leq V_n \leq f(n) + F(n)$ . Puis en déduire que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente en précisant sa limite.

1

➤ Exercices Bonus :

○ Exercice n°01 :(02pts)

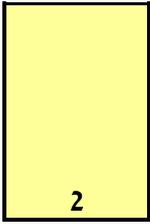


⇒ Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0;1]$  et dérivable sur  $]0;1[$  tel que :

$$\int_0^1 f(t)dt = f(1).$$

✓ Montrer qu'il existe  $c \in ]0;1[$  tel que :  $f'(c) = 0$ .

○ Exercice n°02 :(02pts)

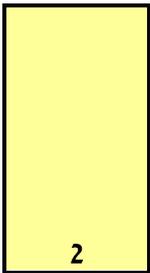


⇒ Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $\mathbb{R}^+$  telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) \leq k \cdot \int_0^x f(t)dt, \text{ Où } k \in \mathbb{R}^{**}.$$

✓ Prouver que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

○ Exercice n°03 :(02pts)

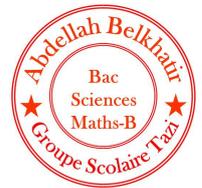


⇒ Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que :

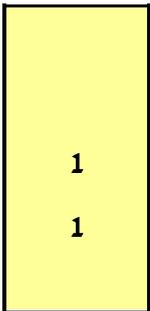
$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) + f(x+1) = 2.$$

On pose :  $I = \int_0^8 f(t)dt$  et  $J = \int_{-1}^3 f(t)dt$ .

✓ Déterminer la valeur de :  $I + 2J$ .



○ Exercice n°04 :(02pts)



✓ Calculer la limite de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans chacun des cas suivants :

(i) :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$ .

(ii) :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{k(2n-k)}$ .

*Fin Du Sujet*