DEVOIR DE CONTRÔLE N°05 – *Bac Sciences Maths B*

Durée : 04 heures – Vendredi 1er mars 2024

> ➢ ***Note : l'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.***
> *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
> *En particulier, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.*

✔ *Le sujet se compose de trois exercices et d'un problème tous indépendants :*

- *Un exercice sur les nombres complexes questions à choix multiple.*
- *Un exercice de synthèse sur les nombres complexes.*
- *Un exercice sur la convergence et l'équivalent d'une suite définie par intégrale.*
- *Un problème sur une fonction définie par intégrale et convergence d'une suite.*

○ *Exercice 01 : (02pts)*

✔ ***Pour chacune des deux questions suivantes, cocher dans chaque cas les bonnes réponses.***

Question 01:

Une équation cartésienne de l'ensemble des points $M(z)$ *tel que :* $|z+1|=2|z-1|$ *est :*

A	$y=x$
B	$9y=9x-11$
C	$(x-1)^2+(y-2)^2=16$
D	$(3x-5)^2+9y^2=16$

Question 02:

Soit A *et* B *les points d'affixes respectives :* $z_A=1$ *et* $z_B=1+e^{i.\frac{\pi}{6}}$.

L'affixe du point C *tel que* ABC *est un triangle rectangle et isocèle en* A *est :*

A	$z_C=1-e^{i.\frac{\pi}{6}}$
B	$z_C=1-e^{-i.\frac{\pi}{3}}$
C	$z_C=\sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{4}}$
D	$z_C=1-e^{i.\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 02 : (4,5pts)

02 pts

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$(E):\ 2z^2+\left(3\sqrt{3}+i\right)z+3+i\sqrt{3}=0.$$

0,5 1)- a)- Justifier que le discriminant de (E) est : $\Delta=2-2i\sqrt{3}$.

0,75 b)- Déterminer l'ensemble des solutions de (E) en justifiant la réponse.

0,75 2)- Déterminer toutes les valeurs de l'entier n pour lesquels : $\left(3+i\sqrt{3}\right)^n\in i\mathbb{R}$.

2,5 pts

II- Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives :

$z_A=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$; $z_B=-i$; $z_C=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ et $z_D=-\sqrt{3}$. On désigne par R la rotation de centre A telle que : $R(D)=C$.

0,5 1)- Montrer qu'une mesure de l'angle θ de R est : $\dfrac{\pi}{3}$.

2)- Soit E le barycentre du système : $\{(A,2);(B,2);(C,-3)\}$.

0,75 ✓ Montrer que : $z_E=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$. Puis justifier que : $R(B)=E$.

0,75 3)- a)- Montrer que : $\dfrac{z_B-z_A}{z_E-z_C}\in i\mathbb{R}$. Puis en déduire la hauteur du triangle ABC issue du point C.

0,5 b)- Déterminer z_F l'affixe de F le point d'intersection de (AB) et (CE).

Exercice 03 : (4,5pts)

⇨ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose : $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.

0,75 1)- Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$. Puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

0,75 2)- a)- En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ nI_n=\ln(2)-\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx.$$

0,5 b)- Montrer que : $\left(\forall t\in\mathbb{R}^+\right);\ \ln(1+t)\le t$.

0,5 c)- En déduire que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ \left|nI_n-\ln(2)\right|\le\dfrac{1}{n+1}$.

0,5 d)- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}n.I_n$ en justifiant la réponse.

3)- Soit $a\in\mathbb{R}^{*+}$.

0,5 **1** ✓ Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{a+x^n}dx=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n.\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{a+x^n}dx=\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

○ Problème : (09pts)

3,5 pts

I- *Soit* f *la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :*

$$f(0)=2 \;\; et \;\; f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x} \; ; si \; x>0 .$$

0,25 — *1)- Déterminer :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0,75 — *2)- Justifier que* f *est continue sur* $[0;+\infty[$.

0,75 — *3)- a)- Montrer que* f *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et que :*

$$(\forall x\in]0;+\infty[);\; f'(x)=\frac{e^{-2x}(2x+1)-1}{x^2}.$$

b)- Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[);\; e^{-2x}(2x+1)-1<0$.

0,75 — ***Indication :*** *On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction* $g: t\mapsto e^{-2t}$ *sur le segment* $[0;x]$, *Où* $x\in]0;+\infty[$.

0,5 — *c)- En déduire la monotonie de* f *sur* $[0;+\infty[$ *et dresser son tableau de variation.*

0,5 — *4)- Montrer que :* $(\forall t\in [1;+\infty[);\; \frac{1}{t}-e^{-2t}\le f(t)\le \frac{1}{t}$.

5,5 pts

II- *Soit* F *la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $F(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

0,5 — *1)- a)- Montrer que :* $(\forall x\in]0;+\infty[);\; x.f(2x)\le F(x)\le x.f(x)$.

0,75 — *b)- En déduire que* F *est dérivable à droite en* 0 *et préciser* $F'_d(0)$.

0,75 — *2)- a)- Montrer que :* $(\forall x\in [1;+\infty[);\; ln(2)-\frac{1}{2}\left(e^{-2x}-e^{-4x}\right)\le F(x)\le ln(2)$.

0,75 — *b)- En déduire :* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ *, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

0,75 — *3)- a)- Montrer que* F *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et que :*

$$(\forall x\in]0;+\infty[);\; F'(x)=\frac{e^{-2x}-e^{-4x}}{x}.$$

0,5 — *b)- Dresser le tableau de variation de* F *en justifiant la réponse.*

1,5 — *4)- Construire la courbe* (C_F) *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5)- On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\; V_n=\sum_{k=0}^{n} f(n+k).$$

1 — ✓ *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\; f(2n)+F(n)\le V_n\le f(n)+F(n)$. *Puis en déduire que la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente en précisant sa limite.*

➢ Exercices Bonus :

Exercice n°01 :(02pts)

⇨ *Soit* f *une fonction continue sur* $[0;1]$ *et dérivable sur* $]0;1[$ *tel que :*

$$\int_0^1 f(t)\,dt = f(1).$$

2 ✓ *Montrer qu'il existe* $c \in]0;1[$ *tel que :* $f'(c) = 0$.

Exercice n°02 :(02pts)

⇨ *Soit* f *une fonction continue et positive sur* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+);\ f(x) \leq k.\int_0^x f(t)\,dt \text{ , Où } k \in \mathbb{R}^{*+}.$$

2 ✓ *Prouver que* f *est nulle sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice n°03 :(02pts)

⇨ *Soit* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) + f(x+1) = 2.$$

On pose : $I = \int_0^8 f(t)\,dt$ *et* $J = \int_{-1}^3 f(t)\,dt$.

2 ✓ *Déterminer la valeur de :* $I + 2.J$.

Exercice n°04 :(02pts)

✓ *Calculer la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *dans chacun des cas suivants :*

1 $(i) : (\forall n \in \mathbb{N}^*);\ S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}.$

1 $(ii) : (\forall n \in \mathbb{N}^*);\ S_n = \frac{1}{n^2}.\sum_{k=1}^{2n} \sqrt{k(2n-k)}.$

Fin Du Sujet