أسئلة :

1) لنحل المعادلة التفاضلية التالية : $(E) \quad : \quad y''+y'-6y=0$.

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي : $(F) \quad : \quad r^2+r-6=0$.

مميز المعادلة (F) هو : $\Delta=b^2-4ac=25>0$ إذن (F) تقبل حلين مختلفين هما : $r_1=\frac{-1+5}{2}=2$ و $r_2=\frac{-1-5}{2}=-3$.

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو : $\boxed{y=\alpha e^{2x}+\beta e^{-3x} \quad / \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$.

2) تحديد الشكل المثلثي للعدد العقدي $Z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$:

لدينا : $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ ؛

ولدينا : $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ ؛

إذن : $Z=\frac{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right]$. الشكل المثلثي للعدد العقدي Z هو : $\boxed{Z=\left[\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right]}$.

__ملاحظة :__ لدينا : $Z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. ومنه نستنتج أن :

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ و $\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ إذن : $\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ و $\boxed{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

3) نضع : $\begin{cases} u'(x)=\cos(x) \\ v(x)=\ln(1+\cos(x)) \end{cases}$ و ؛ إذن : $\begin{cases} u(x)=\sin(x) \\ v(x)=\frac{(1+\cos(x))'}{1+\cos(x)}=\frac{-\sin(x)}{1+\cos(x)} \end{cases}$ ؛ ومنه فإن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x).\ln(1+\cos(x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u(x)v'(x)dx$$

$$=\left[-\sin(x).\ln(1+\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}dx=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(x))dx=[x-\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{2}-1}$$

4) نضع : $u_n=n+\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$. لدينا :

$$u_1=1+\frac{1}{3}$$

$$+ \quad u_2=2+\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

....

$$+ \quad u_n=n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$S_n=(1+2+\dots+n)+\left(\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}$$

التمرين 1:

1) لدينا : $x-z+1=0$: (P) مستوى و (S) فلكة مركزها $\Omega(1,0,0)$ و شعاعها $r=2$.

إذن : $d(\Omega,(P))=\frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<r$. ومنه فإن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة (Γ) .

2) **.** شعاع الدائرة (Γ) هو : $R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{4-2}=\boxed{\sqrt{2}}$.

. تحديد $\omega(x,y,z)$ مركز الدائرة (Γ) :

ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (P) . لدينا $\vec{n}(1,0,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) .

إذن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) . ومنه نستنتج تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) كما يلي :

$(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-t\end{cases}\ /t\in\mathbb{R}$. ومنه : $\omega\in(P)\Rightarrow x-z+1=0$ و $\omega\in(\Delta)$ ؛ إذن : $1+t+t+1=0\Rightarrow t=-1$ ؛

ومنه نجد أن : $\begin{cases}x=1+t=0\\y=t=-1\\z=-t=1\end{cases}$. وبالتالي فإن : $\boxed{\omega(0,-1,1)}$.

التمرين 2:

1) لدينا : $(1-i)^2=1-2i-1=\boxed{-2i}$.

2) لنحل في $\mathbb{C}$ ؛ المعادلة التالية : $(E):z^2-2(1+2i)z-(3-6i)=0$.

لدينا : $\Delta'=(-(1+2i))^2-(-(3-6i))=1+4i-4+3-6i=-2i=(1-i)^2$. إذن للمعادلة (E) حلين مختلفين هما :

$z=1+2i+1-i=\boxed{2+i}$ أو $z=1+2i-1+i=\boxed{3i}$. وبالتالي فإن : $\boxed{S=\{3i,2+i\}}$.

3) لدينا : $A(a=3i)$ و $B(b=2+i)$ و $(D)=\{M(z)\in\wp/|z-3i|=|z-2-i|\}$. لتكن $M(z)\in\wp$. لدينا :

$$\begin{aligned}M(z)\in(D)&\Leftrightarrow |z-3i|=|z-2-i|\\&\Leftrightarrow |z-3i|=|z-(2+i)|\\&\Leftrightarrow |z-a|=|z-b|\\&\Leftrightarrow MA=MB\end{aligned}$$

إذن (D) هو واسط القطعة $[AB]$.

التمرين 3:

الكيس :

N N	B B B B

1) نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس . إحتمال الحصول على كرة بيضاء هو : $\frac{C_4^1}{C_6^1}=\frac{4}{6}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

2) نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال 5 كرات من الكيس . (الأمر يتعلق بالإختبارات المتكررة)

إحتمال الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط هو : $C_5^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{27}=\boxed{\frac{40}{243}}$.

3) نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال n كرة من الكيس . (الأمر يتعلق بالإختبارات المتكررة)

أ) ليكن الحدث A: " الحصول على كرة بيضاء على الأقل ". لدينا: $\overline{A}$: " الحصول على 0 كرة بيضاء " = " الحصول على n كرة سوداء"

لدينا : $p\left(\overline{A}\right)=C_n^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(1-\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$. إذن : $p=p\left(A\right)=1-p\left(\overline{A}\right)=\boxed{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

ب) لدينا :

$$
\begin{aligned}
p\geq 0,999 \quad &\Leftrightarrow \quad 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\geq 0,999\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n\leq 0,001\\
&\Leftrightarrow \quad -n\log(3)\leq -3\\
&\Leftrightarrow \quad n\geq\frac{3}{\log(3)};\quad \log(3)\approx 0,48\\
&\Leftrightarrow \quad n\geq\frac{3}{0,48}\\
&\Leftrightarrow \quad n\geq 6,25
\end{aligned}
$$

ومنه فإن الحد الأدنى من السحبات التي يكون من أجلها $p\geq 0,999$ هو $\boxed{n=7}$.

مسألة :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,2[$ بما يلي : $f\left(x\right)=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$.

1) أ) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f\left(x\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\ln(t)=\boxed{-\infty}$ حيث: $t=\frac{x}{2-x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}0^+$ ؛

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f\left(x\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln(t)=\boxed{+\infty}$ حيث : $t=\frac{x}{2-x}\xrightarrow[x\to 2^-]{}+\infty$.

ب) ليكن $x\in\left]0,2\right[$ ؛ لدينا :

$$
f'(x)=\left(\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)'=\frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{\frac{x}{2-x}}=\frac{\frac{\begin{vmatrix}1&0\\-1&2\end{vmatrix}}{\left(2-x\right)^2}}{\frac{x}{2-x}}=\frac{\frac{2}{\left(2-x\right)^2}}{\frac{x}{2-x}}=\frac{2}{\left(2-x\right)^2}\times\frac{2-x}{x}=\boxed{\frac{2}{x\left(2-x\right)}}
$$

ج) لدينا : $\forall x\in\left]0,2\right[:\quad f'(x)=\frac{2}{x\left(2-x\right)}>0$. إذن f ↗ قطعا على المجال $]0,2[$ ؛ ومنه نضع جدول تغيرات f كمايلي :

x	0	2
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) أ) تذكير: نقول إن نقطة $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ مركز تماثل منحنى $\left(C_f\right)$ لدالة عددية f ؛ إذا تحقق الشرطان التاليان :

$$
\boxed{\begin{array}{ll}(i):\forall x\in D_f, & 2a-x\in D_f\\ (ii):\forall x\in D_f, & f\left(2a-x\right)=2b-f\left(x\right)\end{array}}
$$

لنبين أن النقطة $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ مركز تماثل المنحنى $\left(C\right)$. لدينا :

$D=\left]0,2\right[$ مجموعة تعريف الدالة f و $\forall x\in\left]0,2\right[:\quad 0<x<2\Rightarrow -2<x<0\Rightarrow 0<2-x<2\Rightarrow 2\times 1-x\in\left]0,2\right[$

و $\forall x \in]0,2[,\quad f(2\times 1-x)=\ln\left(\frac{2-x}{2-(2-x)}\right)=\ln\left(\frac{2-x}{x}\right)=-\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)=2\times 0-f(x)$.

وبالتالي فإن A مركز تماثل المنحنى (C) .

ب) معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$ هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ولدينا : $f(1)=0$ و $f'(1)=2$

إذن : $(T): y=2(x-1)$ ؛ أي : $(T): \boxed{y=2x-2}$.

3) نضع : $\varphi(x)=f(x)-x \quad : \forall x \in]0,2[$.

أ) لدينا : $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}=\ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}\right)-\frac{3}{2}=\ln(3)-1,5\approx 1,1-1,5\simeq -0,4<0$ ؛

ولدينا : $\varphi\left(\frac{7}{4}\right)=f\left(\frac{7}{4}\right)-\frac{7}{4}=\ln\left(\frac{\frac{7}{4}}{2-\frac{7}{4}}\right)-\frac{7}{4}=\ln(7)-1,75\approx 1,94-1,75\simeq 0,19>0$.

ب) لدينا φ متصلة على المجال $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$ كفرق دالتين متصلتين (f و $x\mapsto x$) و لدينا : $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\times\varphi\left(\frac{7}{4}\right)<0$.

حسب مبرهنة القيم الوسيطية ؛ $\exists \alpha \in \left]\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right[\;/\; \varphi(\alpha)=0$. و منه فإن : $\varphi(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)-\alpha=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$.

لدينا : $\boxed{\exists \alpha \in \left]\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right[\;/ f(\alpha)=\alpha}$ إذن : (C) و $(\Delta):\boxed{y=x}$ يتقاطعان وفق نقطة $B(\alpha,\alpha)$ حيث $\alpha \in \left]\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right[$.

4) أ) لدينا f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,2[$. إذن f تقابل من المجال $]0,2[$ نحو المجال :

$J=\left]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 2^-} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$.

ب) لدينا f تقابل من $]0,2[$ نحو $\mathbb{R}$. إذن تقابلها العكسي :

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to &]0,2[\\ & x & \mapsto & y=f^{-1}(x)? \end{array}$$

ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in]0,2[$ بحيث : $y=f^{-1}(x)$. لدينا :

$$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y}{2-y}\right)\Leftrightarrow e^x=\frac{y}{2-y}\Leftrightarrow 2e^x-ye^x=y \Leftrightarrow y\left(1+e^x\right)=2e^x \Leftrightarrow y=\frac{2e^x}{1+e^x}$$

وبالتالي فإن :

$$\boxed{\begin{array}{llll} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to &]0,2[\\ & x & \mapsto & f^{-1}(x)=\frac{2e^x}{1+e^x} \end{array}}$$

5) إنشاء :

المنحنى (C) للدالة f .

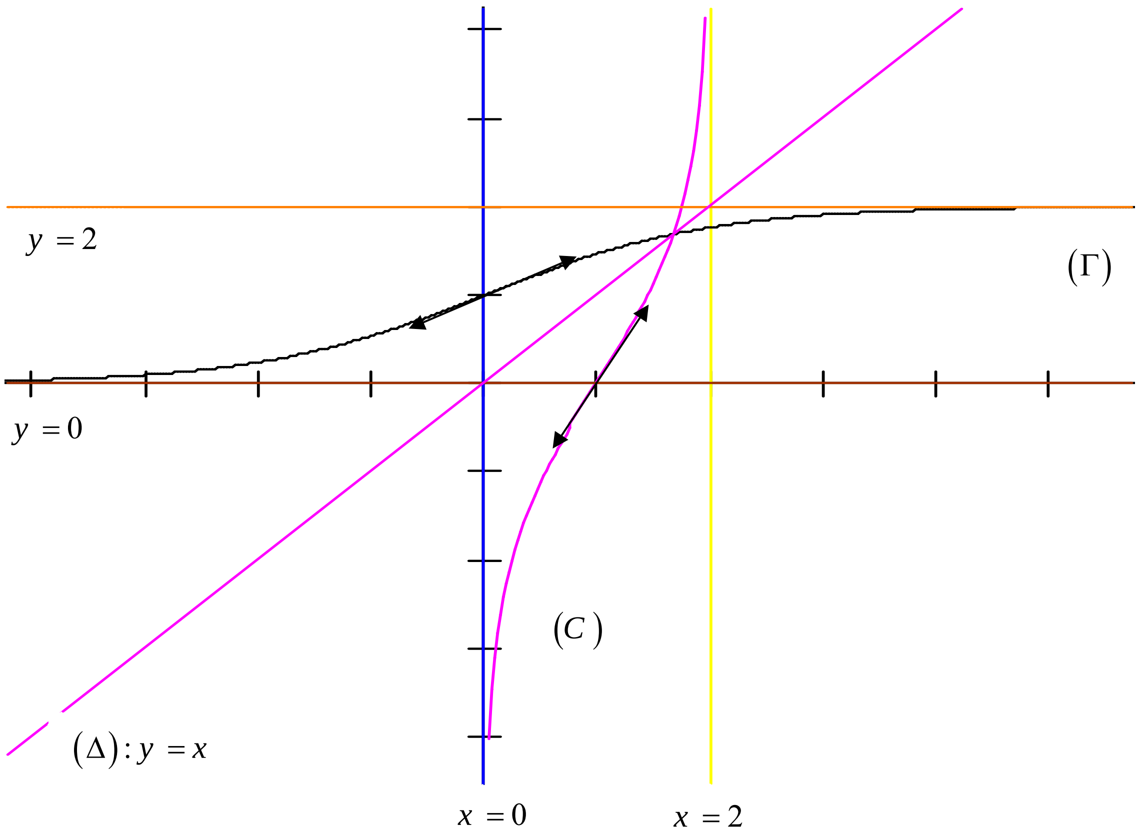
المنحنى (Γ) للدالة f^{-1} .

لدينا $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ؛ إذن (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=0}$.

لدينا $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$ ؛ إذن (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=2}$.

(C) و (Γ) متماثلان بالنسبة للمنصف الأول $(\Delta):\boxed{y=x}$.

(C) و (Γ) يتقاطعان وفق النقطة $B(\alpha,\alpha)$ حيث $\boxed{\alpha\approx 1,68}$.



6) أ) لدينا : $\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_0^\alpha \frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x}dx = \left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^\alpha = \ln\left(1+e^\alpha\right)-\ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right)}$.

ولدينا : $f(\alpha)=\alpha \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha)=\alpha \Leftrightarrow \frac{2e^\alpha}{1+e^\alpha}=\alpha \Leftrightarrow 1+e^\alpha=\frac{2e^\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1+e^\alpha}{2}=\frac{e^\alpha}{\alpha}$. إذن :

$$\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^\alpha}{\alpha}\right) = \ln\left(e^\alpha\right)-\ln(\alpha) = \boxed{\alpha-\ln(\alpha)}$$

ب) مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين (C) و (Γ) ومحوري المعلم هي :

$$A = \int_0^1 \left|f^{-1}(x)\right|dx + \int_1^\alpha \left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx = \int_0^1 f^{-1}(x)dx + \int_1^\alpha \left(f^{-1}(x)-f(x)\right)dx$$

لأن : $\forall x\in[0,1],\ f^{-1}(x)>0$ و $\forall x\in[1,\alpha],\ f^{-1}(x)>f(x)$.

(على المجال $[0,1]$ ؛ لدينا : (C) يوجد تحت محور الأفاصيل و هذا الأخير يوجد تحت (Γ) ؛

على المجال $[1,\alpha]$ ؛ لدينا : محور الأفاصيل يوجد تحت (C) , وهذا الأخير يوجد تحت (Γ) .)

إذن : $A = \int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x}dx + \int_1^\alpha \left(\frac{2e^x}{1+e^x}-\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)dx = \int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x}dx + \int_0^\alpha \frac{2e^x}{1+e^x}dx - \int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)dx$

ومنه فإن حسب 6) أ) , لدينا : $A = 2\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}dx - \int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)dx = 2\left(\alpha-\ln(\alpha)\right)-\int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)dx$

نضع : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right) \end{cases}$ ؛ إذن : $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\left(\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right)'=f'(x)=\frac{2}{x(2-x)} \end{cases}$

حسب المكاملة بالأجزاء , نحصل على : $\int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)dx = \int_1^\alpha u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha u(x)v'(x)dx$

$$\int_1^{\alpha} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)dx = \left[x \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} \frac{2}{2-x}dx = \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) + 2\left[\ln(2-x)\right]_1^{\alpha} = \alpha^2 + 2\ln(2-\alpha)$$

لأن : $\ln\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) = f(\alpha) = \alpha$ (حسب (3))

وبما أن $\ln\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) = \alpha \Rightarrow \ln(\alpha) - \ln(2-\alpha) = \alpha \Rightarrow \ln(2-\alpha) = \ln(\alpha) - \alpha$ ؛ فإن :

$$A = 2(\alpha - \ln(\alpha)) - (\alpha^2 + 2\ln(2-\alpha)) = 2(\alpha - \ln(\alpha)) - (\alpha^2 + 2(\ln(\alpha) - \alpha)) = \boxed{-\alpha^2 + 4\alpha - 4\ln(\alpha)}(u.a.)$$

$$\boxed{A \approx 1,8 \quad u.a.}$$

انتهى