الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فـاس- بولمان نيـابة فاس الجديد Lycée Ibn Hazm. fes	مـــادة الريـــاضيـــات امتحان تجريبي 2012-2011	الثانية علوم رياضية أ و ب مدة الإنجاز : 4 ساعات المعامل : 9 Kharbat

التمريـــــن الأول 1 نقط

في إحدى مستودعات السيارات يؤدى عن حراسة السيارات بواسطة عداد حسب التعريفة التالية نصف دراهم عن كل 20دقيقة

يوجد في جيب صاحب السيارة 3قطع نقدية من فئة نصف درهم و6قطع من فئة درهم

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمدة الحراسة التي تسمح بها القطع الثلاثة المسحوبة

-1 حدد قانون إحتمال X 0.75

-2 أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ 0.25

التمرين الثاني 4 نقط

الجزء الأول

لكل $m\in\mathbb{C}^*$ نرمز ب (E_m) للمعادلة $(E_m): z^2-2mz+m^2+4=0$

-1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) 0.5

نرمز لحلي المعادلة ب z_1 و z_2 حيث $\operatorname{Im} z_1=2$ في حالة $m=1$ 0.25

-2 نفترض أن $m=2e^{i\theta}$ مع $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ أكتب الشكل المثلثي للعدد z_1

-3 في ما سيأتي نرمز ب M_1 و M_2 للنقطتين التي ألحاقهما على التوالي $z_1=m+2i$ و $z_2=m-2i$ 0.75

أ- بين التكافؤ الآتي $\frac{z_2}{z_1}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow |m|=2$ واستنتج مجموعة النقط $M(m)$ التي تحقق $\overrightarrow{OM_1}\perp\overrightarrow{OM_2}$ 0.75

ب- بين التكافؤ الآتي $|z_2|=|z_1|\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$ واستنتج مجموعة النقط $M(m)$ التي من أجلها $OM_1=OM_2$ 0.25

ت- إستنتج قيم m التي من أجلها المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية و متساوي الساقين في O

الجزء الثاني

نعتبر S التماثل المركزي ذو المركز $I(1)$ و r الدوران الدي مركزه $\Omega(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى تخالف النقطة O أصل المعلم ولتكن النقطة $A(2)$ نضع $M'=S(M)$ و $M''=r(M)$

-1 بين أن $z'=-z+2$ و $z''=iz+2$ 0.75

-2 حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة 0.75

التمرين الثالث 5 نقط

الجزء الأول

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ نضع $J=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

نذ كر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية. و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

نضع $E=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,/\,J\times M=M\times J\}$

1) لتكن $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ حيث $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

أ- بين التكافؤ اللآتي $M\in E\Leftrightarrow\begin{cases}c=3b\\d=a\end{cases}$ 0.25

ب- إستنتج أن $E=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,/\,M=a.I+b.J\ \ ,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ 0.25

2) بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ 0.5

3) بين أن (I,J) أساس للفضاء $(E,+,.)$ 0.25

في ما سيأتي نضع $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:M_{(a,b)}=aI+bJ$

4) تحقق أن : $J^2=3I$ واستنتج $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall(a',b')\in\mathbb{R}^2:M_{(a,b)}\times M_{(a',b')}=M_{(a\,a'+3bb',\ ab'+ba')}$ 0.5

5) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية وغير كاملة. هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ 0.75

الجزء الثاني

نضع $A=2I+J$

1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*:A^n\in E$ 0.5

2- ليكن (x_n,y_n) زوج إحداثيات A^n في الأساس (I,J) 0.25

بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*:\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+3y_n\\y_{n+1}=x_n+2y_n\end{cases}$ و $\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases}$

3- نقبل أن $\forall n\in\mathbb{N}^*:(x_n,y_n)\in\mathbb{N}^2$ 0.5

تحقق أن $\forall n\in\mathbb{N}^*:x_{n+1}{}^2-3y_{n+1}{}^2=x_n{}^2-3y_n{}^2$ واستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}^*:x_n\wedge y_n=1$

4- ليكن p عدد أولي حيث $p\geq5$ نفترض أن p/x^2-3y^2 مع $(x,y)\in(\mathbb{N}^*)^2$ و $x\wedge y=1$

أ- بين أن $p\wedge y=1$ واستنتج أن $\exists u\in\mathbb{Z}:uy\equiv1[p]$ 0.25

ب- نضع $t=ux$ بين $t^2\equiv3[p]$ 0.5

ت- إستنتج مستعملا مبرهنة fermat أن $3^{\frac{p-1}{2}}\equiv1[p]$

10pts مـــــــــــــســـــــــــــألـــــــــــــــة

الجـــــــــزء الأول

(1 أثبت أن المعادلة $\ln(x)+x=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in\mathbb{R}^*_+$ و أن $\frac{1}{3}<\alpha<\frac{2}{3}$ — 0.5

(2 ضع جدول إشارة $\ln(x)+x$ لكل $x>0$ — 0.25

(3 نضع $\forall x>0:\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}$

أ- بين التكافؤ الآتي $\forall x>0:\varphi(x)=x\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0$ و استنتج أن $\frac{1}{\alpha}$ هو الحل الوحيد للمعادلة $\varphi(x)=x$ على $\mathbb{R}^*_+$ — 0.25

ب- بين أن $\forall x\in\left[\frac{3}{2},3\right]:|\varphi'(x)|\le\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}$ — 0.25

(4 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=\varphi(u_n)\end{cases}$

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\in\left[\frac{3}{2},2\right]$ — 0.25

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}:\left|u_{n+1}-\frac{1}{\alpha}\right|\le\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\left|u_n-\frac{1}{\alpha}\right|$ — 0.25

ت- استنتج المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها — 0.25

الجـــــــــزء الثـــــاني

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي

$$\begin{cases}f(x)=\ln(x).e^{-\frac{1}{x}} & ,\ x\in]0,+\infty[\\ f(0)=0\end{cases}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

-1 أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة المحصلة — 0.5

-2 بين أن متصلة على $[0,+\infty[$ — 0.5

-3 بين أن f قابلة إشتقاق على اليمين في 0 و أن $f_d'(0)=0$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصلة — 0.5

-4 بين أن $f'(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$ لكل $x\in]0,+\infty[$ — 0.5

-5 أ- ضع جدول تغيرات f — 0.25

ت- أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $A(1;0)$ — 0.25

ث- نقبل أن النقطة $A(1;0)$ نقطة أنعطاف أنشئ المنحنى (C) و المماس (T) نأخذ $\alpha \approx 0.6$ و $f(\alpha) \approx -0.1$.	0.5
الجـــــــــــزء الثــــــالث نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي $F(x)=\int_1^x f(t)dt$	
1- علل وجود $F(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}^+$	0.25
2- بين أن $\forall a\in\mathbb{R}: e^{-a}\geq 1-a$ واستنتج أن $\forall t\geq 1: f(t)\geq \ln t-\frac{\ln t}{t}$	0.5
3- باستعمال مكاملة بالاجزاء أحسب $\int_1^x \ln(t)\, dt$ وأستنتج أن $\forall x\geq 1: F(x)\geq x\ln x - x - \frac{\ln^2(x)}{2}$	0.75
4- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$ وأول هندسيا النتيجة المحصلة	0.5
5- بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ وأحسب مشتقها	0.5
6- ضع جدول تغيرات F	0.25
7- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي n المعادلة $F(x)=n$ تقبل حلا وحيدا $x_n\in[1;+\infty[$	0.5
8- تحقق أن $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt=1$ $\forall n\in\mathbb{N}:$ واستنتج أن المتتالية (x_n) تزايدية	0.5
9- بين أن $\lim x_n=+\infty$	0.25
10- بين أن $\forall x\geq 1: f(x)\leq (x-1)e^{-1}$ يمكن استعمال التمثيل المبياني استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}^*: n\leq \frac{(x_n-1)^2}{2}e^{-1}$	0.5
11- أثبت أن $\lim \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}}=+\infty$	0.5