معلومات عامّة

– يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.

– مدّة إنجاز موضوع الامتحان: 3 ساعات.

– عدد الصفحات: 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمّن معلومات و الصفحتان الثانية و الثالثة تتضمّنان تمارين الامتحان)

– يمكن للمترشّح إنجاز تمارين الامتحان في التّرتيب الذي يناسبه.

– ينبغي تفادي استعمال اللّون الأحمر عند تحرير الأجوبة.

– بالرّغم من تكرار بعض الرّموز في أكثر من تمرين فكلّ رمز مرتبط بالتّمرين المستعمل فيه و لا علاقة له بالتّمارين السّابقة أو اللاحقة.

معلومات خاصّة

يتكوّن الموضوع من أربعة تمارين و مسألة مستقلّة فيما بينها و تتوزّع حسب المجالات التّالية:

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	حساب الاحتمال	2.75 نقطة
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الرابع	المعادلات التفاضلية و المكاملة بالأجزاء (سؤالان مستقلان)	1.75 نقطة
مسألة	دراسة دالة و المتتاليات العددية و حساب التكامل	9.5 نقطة

بالتوفيق

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين 1

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النّقط $A(3\,,-2\,,2)$ و $B(-1\,,6\,,4)$ و $C(5\,,4\,,4)$ و الفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$.

0.5 **1)** تحقّق أنّ المثلث ABC قائم الزاوية في C و استنتج أنّ $C\in(S)$.

0.5 **2)** بيّن أنّ معادلة الفلكة (S) هي: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=21$.

0.5 **3)** حدّد معادلة المستوى (P) المماس ل (S) في C.

0.5 **4)** أ) نعتبر المستقيم: $(\Delta):\begin{cases} x=t+4 \\ y=3 \\ z=3t+2 \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$، بيّن أنّ مسافة Ω مركز الفلكة (S) عن المستقيم (Δ) هي: $\sqrt{11}$.

0.5 **ب)** حدّد إحداثيات نقطتا تقاطع (Δ) و (S).

0.5 **5)** نعتبر المستوى $(L):x-4y+2z-d=0$، حدّد قيم d لكي يكون (L) مماسّاً ل (S).

التمرين 2

يحتوي صندوق على خمس كرات خضراء تحمل الأرقام 0 و 1 و 2 و 2 و 2
و على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 و1 و 2.
كلّ الكرات غير قابلة للتمييز باللّمس، السؤالان 1) و 2) مستقلاّن فيما بينهما.

1) نسحب عشوائياً و في آن واحد كرتين:

1.25 أ) نعتبر X المتغيّر العشوائي المرتبط بمجموع الرّقمين المحصّل عليهما، حدّد قانون احتمال X.

0.75 **ب)** علماً أنّ الكرتين المسحوبتين تحملان الرّقم 1 أحسب احتمال أن يكون لونهما أبيض.

بالتوفيق

2) نسحب كرةً واحدة و نضعها جانباً ثمّ نسحب بتتابع و بإحلال كرتين، أحسب احتمال الحدث:

0.75 E " الحصول على كرتين خضراوين و كرة بيضاء ".

التمرين 3

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي $a=2-\sqrt{2}$ و $b=3-i$ و $c=3+i$ و $d=2+\sqrt{2}$.

0.5 **1)** حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+10=0$.

0.25 + 0.5 **2)** بيّن أنّ $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ثمّ استنتج أنّ: $\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^{20}=-1$.

0.5 **3)** أ) بيّن أنّ: $z'=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2})z+3+2\sqrt{2}-i-i\sqrt{2}$ هو التمثيل العقدي للدوران R الذي مركزه D و زاويته $\dfrac{3\pi}{4}$.

0.25 **ب)** تحقّق أنّ صورة النّقطة C بالدوران R هي النّقطة B.

0.5 **4)** استنتج أنّ النّقط A و B و C و D متداورة.

0.5 **5)** حدّد مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقّق: $|z-b|=|z-c|$.

التمرين 4

(أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها)

0.5 — **1)** حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y'=\frac{1}{5}y-4$.

1 +0.25 — **2)** تحقّق أنّ: $\left(\ln(\frac{2x}{x+3})\right)'=\frac{3}{x(x+3)}$ ثمّ بيّن مستعملاً مكاملة بالأجزاء أنّ: $\int_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{\ln(2x)}{(x+3)^2}\,dx=\frac{1}{3}\ln(\frac{7\sqrt{6}}{12})$

مسألـــة

<u>الجزء الأوّل:</u> نعتبر الدالة العددية: $f(x)=\frac{e^{2x}-2e^{x}+6}{e^{x}+1}$

0.25 — **1)** تحقّق أنّ $D_f=\mathbb{R}$.

0.5 — **2)** أحسب $f(0)$ و تحقّق أنّ: $f(\ln 2)=2$.

0.5 — **3)** أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.

0.75 — **4)** أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بيّن أنّ C_f يقبل فرعاً شلجمياً في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

0.75 — **5)** أ) بيّن أنّ: $f'(x)=\frac{e^{x}(e^{x}+4)(e^{x}-2)}{(e^{x}+1)^2}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$.

0.75 — **ب)** أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول التغيرات. نأخذ: $\ln 2\approx 0,7$.

0.75 — **6)** أنشئ C_f ، نقبل أنّ $I(-0,5\,;\,3.2)$ نقطة انعطاف و أنّ $f(-2)\approx 5$ و أنّ $f(2)\approx 5,5$.

بالتوفيق

<u>الجزء الثّاني:</u> نعتبر الدالة g قصور f على المجال $]-\infty,\ln 2]$.

0.25 — **1)** تحقّق أنّ الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرّفة على المجال $[2\,,6[$.

0.5 — **2)** أ) نعتبر $x\in[2\,,6[$ و $y\in]-\infty\,,\ln 2]$ ، بيّن أنّ: $f(y)=x\Leftrightarrow(x+2-2e^{y})^2=(x-2)(x+10)$.

0.5 — **ب)** حدّد صيغة الدالة العكسية $g^{-1}(x)$.

<u>الجزء الثالث:</u>

0.5+0.25 — **1)** أحسب التكاملين: $I=\int_{0}^{\ln 2}(e^{x}-3)\,dx$ و $J=\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$.

0.25 — **2)** أ) تحقّق أنّ: $f(x)=e^{x}-3+\frac{9e^{-x}}{1+e^{-x}}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$.

0.25 — **ب)** حدّد مساحة الحيّز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=\ln 2$.

<u>الجزء الرّابع:</u> نعتبر الدالة: $h(x)=f(\ln x)$ المعرّفة على المجال $I=[\,2\,,e\,]$.

0.5 — **1)** حدّد باستعمال الدالتين f و $x\mapsto\ln x$ ، صورة I بالدالة h و استنتج أنّ: $h(I)\subset I$ ؛ نأخذ $f(1)\approx 2,3$.

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة ب: $U_0=e$ و $U_{n+1}=h(U_n)$ لكلّ n من $\mathbb{N}$.

0.5 — أ) بيّن بالترجّع أنّ $U_n>2$ لكلّ n من $\mathbb{N}$.

0.5+ 0.5 — **ب)** تحقّق أنّ $h(x)-x=\frac{6-3x}{x+1}$ لكلّ x من I و استنتج أنّ المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعاً.

0.5 + 0.25 — **ج)** استنتج أنّ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثمّ حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.