ثانوية عبد الله الشفشاوني
أولاد تايمة
2 bac SM B

يوم 2010/10/26
المدة: ساعتان
ذ. مصطفى حايمد

فرض محروس رقم 1

التنقيط	موضوع الفرض

تمرين 1

I) أ) بين أن : $\forall n \in IN : n! \geq 2^{n-1}$ — **1**

ب) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ !$ — **0,5**

II) ليكن $a \succ 0$. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بـــ : $\forall n \in IN : u_n = \dfrac{n\ !}{a^n}$

1) نفترض أن : $0 \prec a \prec 1$ حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. — **0,5**

2) نفترض أن : $a \succ 1$:

ا) بين أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. — **1**

ب) استنتج أن : $\exists p \in IN \ / \ \forall n \geq p : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$ — **1**

و أن : $\forall n \geq p : u_{n+1} \geq 2^{n-p} u_p$

ج) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. — **0,5**

تمرين 2

ليكن $a \in IR$ و $b \in IR$ حيث $0 \prec a \prec b$

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n \in IN}$ و $(v_n)_{n \in IN}$ المعرفتين بـــ :

$$\begin{cases} u_0 = a \ ; v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) بين أن : $\forall n \in IN : u_n \succ 0$ و $v_n \succ 0$ — **1**

2) بين أن : $\forall n \in IN : u_n \leq v_n$ — **1,5**

3) أ) بين أن : $\forall n \in IN : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$ — **1,5**

ب) استنتج أن : $\forall n \in IN : v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (b-a)$ — **1**

4) بين أن $(u_n)_{n \in IN}$ و $(v_n)_{n \in IN}$ متحاديتان. — **1,5**

5) نضع $a = 1$ و $b = 2$ ولتكن l النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)_{n \in IN}$ و $(v_n)_{n \in IN}$

أ) بين أن : $\forall n \in IN : u_n \leq l \leq v_n$ — **1**

ب)استنتج أن : $\forall n \in IN : 0 \leq v_n - l \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ وان $1 \leq l \leq \dfrac{3}{2}$ — **1,5**

تمرين 4

نعتبر الدالة f المعرفة بـــ :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3-x} - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f وفسر لماذا f متصلة على D_f . — **1**

2) بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في $a = -1$. — **1,5**

3) حدد $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ — **1**

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]1\ ,\ 2[$. — **1**

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة بـــ : $f(x) = (4x-1)E(4x)$ ادرس اتصال الدالة f في العددين $\dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{1}{4}$ — **2**