تمرين1

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x)=3x^2-2x+2$ لكل x من $\mathbb{R}$

1. بين ان $\forall x\in IR \quad f(x)-3=(x-1)(3x+1)$.
2. بين انه اذا كان $|x-1|\prec 1$ فان $|f(x)-3|\prec 7|x-1|$.
3. باستعمال تعريف النهاية بين ان $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

تمرين2

بين باستعمال التعريف ان $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^2+x}{x}=1$.

تمرين3

لتكن f الدالة المعرفة ب $f(x)=x^5\left(\cos\dfrac{1}{x^2}-\sin\dfrac{1}{x}\right)-\sqrt{3}$.

1. حدد حيز تعريف الدالة f .
2. ا. تاكد ان $\forall x\in IR^* \quad \left|\cos\dfrac{1}{x^2}-\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 2$.

   ب. استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{0} x^4\left(\cos\dfrac{1}{x^2}-\sin\dfrac{1}{x}\right)$.
3. بين ان $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\sqrt{3}$

تمرين4

1. باستعمال الترتيب والنهايات حدد النهاية $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. ا. بين ان

   $\forall x\in IR^* \quad 3x-2x^2\prec x^2\left(E\left(\dfrac{1}{x}\right)+E\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)\le 3x$.

   ب. استنتج النهاية $\lim\limits_{0} x^2\left(E\left(\dfrac{1}{x}\right)+E\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)$.

تمرين5

حدد نهاية f عند x_0 في كل حالة مما يلي

1. $f(x)=3x^3-5x^2+2x-7;x_0=2$
2. $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{5x-2};x_0=1$
3. $f(x)=2x+\left|\dfrac{x}{1+3x}\right|;x_0=-1$
4. $f(x)=x^2\sqrt{6-5x};x_0=-2$
5. $f(x)=\sin 3x+\cos(2x);x_0=\dfrac{\pi}{2}$
6. $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{2+x^2}}{\sin\pi x};x_0=\dfrac{1}{2}$
7. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{3x^2-2x-1};x_0=1$
8. $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x-1|-1};x_0=2$
9. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}-1};x_0=1$.
10. $f(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{|x|-x^2};x_0=0$
11. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{|x-3|};x_0=3$
12. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{2x+3}};x_0=3$
13. $f(x)=\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2};x_0=2$

تمرين6 حدد نهاية f عند x_0 في كل حالة مما يلي

1. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x+\sin x};x_0=0$
2. $f(x)=\dfrac{x-\sin 3x}{x+\sin 2x};x_0=0$
3. $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x\tan x};x_0=0$
4. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x+\sin x};x_0=0$
5. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x+1}-1};x_0=0$
6. $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x};x_0=\pi$
7. $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 4x};x_0=\dfrac{\pi}{4}$
8. $f(x)=(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2};x_0=1$
9. $f(x)=\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x};x_0=\dfrac{\pi}{2}$

تمرين7

حدد النهايات التالية $\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{x+2}$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}^-}\frac{\cos 2x}{\tan x}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{|x+1|\left(x+\sqrt{2}\right)}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to -3^+}(x+3)x\sin\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ و

$\lim\limits_{x\to -2^-}\sqrt{-2-x}\sin\frac{1}{\sqrt{-2-x}}$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}|x^2-3x+2|$

تمرين8

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x, & x<-1\\ x^2+4, & -1\le x<1\\ \sqrt{x^2+1}+2, & x\ge 1\end{cases}$

1. بين ان f تقبل نهاية منتهية عند العدد -1
2. ادرس نهاية f عند العدد 1.

تمرين9

1. لتكن f دالة تحقق $\forall x\in IR\ \ 1-\frac{x^2}{2}\le f(x)\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

ا. احسب $f(0)$ ثم $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

ب. بين ان $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

2. لتكن f دالة فردية تحقق

$\forall x\in IR^+\ \ x-\frac{x^3}{3}\le f(x)\le x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$.

ا. بين ان $\forall x\in IR^-\ \ x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\le f(x)\le x-\frac{x^3}{3}$.

ب. بين ان $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

ج. بين ان $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^3}=-\frac{1}{3}$.

تمرين10 نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x)=\frac{x}{1+E(x)}$

1. حدد D_f و $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$

2. بين ان $\forall x\ge 0:\frac{x}{1+x}\le f(x)\le 1$ ثم احسب

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

3. بين ان $\forall x<-1:1<f(x)<\frac{x}{1+x}$

واحسب النهاية $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$

تمرين11

ادرس نهاية f عند x_0 في كل حالة مما يلي

1. $f(x)=\frac{-3x^5+\sqrt{2}x^2+2010x+1}{-7x^3+x^6-2010x-1}$ $|x_0|=+\infty$.
2. $f(x)=\frac{x-\sqrt{|x|}}{x+\sqrt{|x|}}$ $|x_0|=+\infty$.
3. $f(x)=\sqrt{\frac{-3x+1}{-2x-1}}$ $|x_0|=+\infty$.
4. $f(x)=\frac{\cos x}{x^2+\sqrt{|x|}}$ $|x_0|=+\infty$.
5. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x-1$ $|x_0|=+\infty$.
6. $f(x)=-2x^3-3x^5+5x-7$ $|x_0|=+\infty$.
7. $f(x)=\frac{x^4-x}{3x^2+2x-1}$ $|x_0|=+\infty$.
8. $f(x)=\frac{5x^3-2x}{|x^2-1|-1}$ $|x_0|=+\infty$.
9. $f(x)=\frac{x^4+x}{x^2-2x+1}$ $x_0=1$
10. $f(x)=\frac{-2}{x-1}$ $x_0=1^+$
11. $f(x)=\frac{-2x}{x^2-3x+2}$ $x_0=2^-$

تمرين12

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

1. بين ان $\forall x\succ 1\ \ |f(x)-3|=\frac{5}{x-1}$
2. مستعملا التعريف بين ان $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=3$
3. بين ان $\forall x>1:f(x)>\frac{2}{x-1}$
4. مستعملا التعريف بين ان $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$

تمرين13

نعتبر الدالة العددية $\begin{cases} f(x) = sinx - \sqrt{x}\,; x \geq 0 \\ f(x) = \frac{1-cosx}{x} \;\; ; \;\; x < 0 \end{cases}$

1) حدد D_f و اثبت أن: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

2) أثبت أن $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ واستنتج $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3) أثبت أن $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

4.احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

تمرين14 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = x - \frac{2x+1}{x^3} + 2 \;\; ; \;\; x > 0 \\ f(x) = 1 - tanx \;\; ; -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \end{cases}$$

1- حدد D حيز تعريف الدالة f

2 - أ) حدد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)$

ب) النهايتين حدد $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-x-2$.

3- حدد النهاية $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{x}$.

تمرين15 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = x^5 - x^4 cos\frac{1}{x^5} \;\; ; \;\; x \neq 0 \\ f(0) = 2010 \end{cases}$$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. بين ان $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
3. باستعمال النهايات والترتيب بين ان $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

تمرين16 :

لتكن f و g دالتين معرفتين على $I =]a-r, a+r[- \{a\}$ حيث $a \in IR$ و $r \in]0,+\infty[$ ونضع $F = g.f$

1. نفترض ان f محدودة على وان $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

بين ان $\lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$.

2. بين انه ادا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ حيث $l \in IR^*$ و g لا تقبل نهاية عند a فان F لا تقبل نهاية عند a .

3. تطبيق

نعتبر الدالتين F و f المعرفتين بما يلي $F(x) = \begin{cases} -x^2 \,, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 \,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \,, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 \,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

أ. بين ان $F = g.f$ حيث g دالة حدودية درجتها 2 ينبغي تحديدها.

ب. مستعملا 1. اوجد $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$.

ت. مستعملا برهانا بالخلف بين ان f لا تقبل نهاية عند اي عدد حقيقي.

ث. استنتج ان 0 هو العدد الوحيد الدي تقبل الدالة F نهاية عنده.

تمرين17 :

بين انه ادا كانت f تقبل نهاية في نقطة فان هده النهاية وحيدة.

تمرين18 :

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $I = [a,+\infty[$ وتزايدية قطعا عليه وغير مكبورة حيث $a \in IR$.

ليكن $A \in]0,+\infty[$

1. بين انه يوجد B من I حيث $f(B) \succ A$.
2. بين ان $\forall x \in I \quad x \succ B \Rightarrow f(x) \succ A$.
3. استنتج ان $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
4. اوجد نتيجة مماثلة لما سبق بالنسبة لدالة تناقصية قطعا وغير مصغورة على مجال $J =]-\infty, a]$ حيث $a \in IR$.

عبد الخالق العمراني

عبدالخالق العمراني