Lycée Med Ben Hassan El ouazzani Khemisset	*Année scolaire 2018/2019*
	Date : 16/11/2018
Niveau : 2éme Année Bac Sm Bac International	*Matière : Mathématiques* — *Ali* Cherif
	Devoir libre N° 2 du 1ére semestre

Exercice 1 :

I) 1 – Montrer que la restriction de la fonction $x \to \cos(x)$ sur l'intervalle $[0,\pi]$ est une bijection de $[0,\pi]$ vers un intervalle J. soit h sa fonction réciproque .

2 – a – Déterminer D_h ; $h(1)$; $h(-1)$ et $h(0)$.

– b – Montrer que h est dérivable sur $]-1;1[$ et que $(\forall x \in]-1;1[) : h'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

II) Soit a un nombre réel tel que $|a| \prec 1$ et f_a la fonction définie par : $f_a(x) = h\left(\dfrac{a+\cos(x)}{1+a\cos(x)}\right)$

1 – a – Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $1 + a\cos(x) \succ 0$

– b – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\left|\dfrac{a+\cos(x)}{1+a\cos(x)}\right| \leq 1$

– c – Déduire le domaine de définition de f_a.

– d – Montrer qu'on peut étudier la fonction f_a sur l'intervalle $[0;\pi]$

2 – Montrer que la fonction f_a est dérivable sur $]0;\pi[$ et que :

$$(\forall x \in]0;\pi[)\ f'_a(x) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a\cos(x)}$$

3 – Soit g_a la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $g_a(x) = \dfrac{1}{1+a\cos(x)} - \dfrac{1}{1+a}$.

a – Etudier les variations de la fonction g_a selon les valeurs de a.

b – Déduire que $\left(\forall (c;x)[0;\pi]^2\right)$ $0 \prec c \prec x \Rightarrow |g_a(c)| \leq |g_a(x)|$

c – Soit $x]0;\pi[$, on appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction $k : t \to f_a(t) - t\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}$ sur l'intervalle $[0;x]$,

Montrer que : $\left|f_a(x) - x\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right| \leq x\sqrt{1-a^2}.|g_a(x)|$

d – Déduire que f_a est dérivable à droite en 0 et calculer $(f_a)'_d(0)$

4 – a – Montrer que : $(\forall t[-1;1])$ $h(-t) = \pi - h(t)$

b – Déduire que f_a est dérivable à gauche en π et calculer $(f_a)'_g(\pi)$

5 – a – Donner le tableau des variations de f_a sur $[0;\pi]$.

b – Tracer la courbe $\left(C_{f_{\frac{1}{2}}}\right)$ sur $[-2\pi;2\pi]$.

III − On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \frac{\pi}{2}$.

On suppose que $0 \prec a \prec 1$

1 − Montrer que $h(a) \prec \frac{\pi}{2}$

2 − Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 \le u_n \le \pi$ et que la suite (u_n) est décroissante.

3 − Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa lmite.

__Exercice 2:__

I) On considère la suite définie par : $u_n = \sqrt[n]{x}$ où $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

1) Montrer que si $x \ge 1$ alors $(\forall n \ge 2)$ $0 \le \sqrt[n]{x} - 1 \le \frac{x-1}{n}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ au cas où $0 \prec x \prec 1$.

II) On considère les deux suites $(a_n)_{n\ge2}$ et $(b_n)_{n\ge2}$ tels que :

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \quad \text{et} \quad b_n = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \quad \text{où} \quad x \succ 1$$

1) a − Montrer que : $(\forall n \ge 2)(\forall t \ge 1)$: $n\left(t^{n+1} - 1\right) \ge (n+1)\left(t^n - 1\right)$.

b − Montrer que $(a_n)_{n\ge2}$ est décroissante et $(b_n)_{n\ge2}$ est croiassante .

2) Montrer que les suites $(a_n)_{n\ge2}$ et $(b_n)_{n\ge2}$ sont adjacentes .

3) Supposons que les suites $(a_n)_{n\ge2}$ et $(b_n)_{n\ge2}$ convergent vers ℓ ; Montrer que $0 \le \ell \le x - 1$