الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين جهة الرباط سلا زمور زعير نيابة الخميسات	تجريبي دورة يونيو 2015 لمادة الرياضيات	2 بكالوريا علوم رياضية
		مدة الإنجاز : أربع ساعات
		المعامل : 09

■ **التمرين رقم 01: (03 نقط)**

⇦ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة :

$$(E) : 2x^{16} - x^{13} - 1 \equiv 0[34] .$$

1)- أ- باستعمال خوارزمية أقليدس حدد $13 \wedge 16$. — 0,25

ب- إستنتج حلا خاصا للمعادلة : $(F) : 13a - 16b = 1$. — 0,25

ج- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (F) مبرزا مراحل الحل . — 0,5

2)- أ- بين أن إذا كان x حلا للمعادلة (E) ، فإن : $x \wedge 2 = 1$ و $x \wedge 17 = 1$. — 0,5

ب- بين أن : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[2] \\ x^{13} \equiv 1[17] \end{cases}$. — 0,75

ج- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{Z}); \ \left(x^{13} \equiv 1[17] \Leftrightarrow x \equiv 1[17]\right)$ ، ثم إستنتج مجموعة حلول (E) . — 0,75

■ **التمرين رقم 02: (04 نقط)**

I- في المجموعة $G = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ نعتبر القانون $\perp$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (a,b) \in G^2); a \perp b = a + b - ab\sqrt{2} .$$

1)- أ- تحقق أن : $(\forall (a,b) \in G^2); a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$. — 0,5

ب- إستنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في G . — 0,25

2)- أ- بين أن $(G, \perp)$ زمرة تبادلية . — 0,5

ب- نضع : $H = \left]-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ ، بين أن H زمرة جزئية من $(G, \perp)$. — 0,5

II- في $\mathrm{IM}_2(\mathbb{R})$ نعتبر المصفوفتان : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

و المجموعة الجزئية : $E = \left\{ M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} / a \in G \right\}$.

1)- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); A^n = (-2)^{n-1}.A$ وأن : $(\forall a \in G); M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}.A$. — 0,75

ب- بين أن E جزء مستقر من $(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}), \times)$. — 0,25

2)- نعتبر التطبيق f المعرف من G نحو E بما يلي : $(\forall a \in G); \ f(a) = M(a)$.

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(G, \perp)$ نحو $(E, \times)$. — 0,75

ب- إستنتج بنية $(E, \times)$ ، و حدد مقلوب كل مصفوفة $M(a)$ من E . — 0,5

■ **التمرين رقم 03:** (03 نقط)

⇦ لكل z من $\mathbb{C}-\{1\}$ نضع : $f(z)=\dfrac{iz^2}{z-1}$

0,5 **1**)- أكتب $f(u)$ على الشكل المثلثي ، حيث : $u=i\tan\theta$ و $0\prec\theta\prec\dfrac{\pi}{2}$.

0,25 **2**)- أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $a=1-4i\sqrt{3}$.

0,5 ب- حدد الحلين z_1 و z_2 للمعادلة : $(E):f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ بحيث : $|z_1|=1$.

0,25 ج- بين أن : $(z_1)^6-27(z_2)^6=2$.

3)- حدد و أنشىء في المستوى العقدي (P) مجموعتي النقط :

0,5 $(E_1)=\{M(z)\in(\mathrm{P});f(z)\in i\mathbb{R}\}$ و $(E_2)=\{M(z)\in(\mathrm{P});|f(z)|=|z|\}$.

4)- لتكن A و B النقطتين اللتين لحقاهما : $z_A=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_B=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

0,25 أ- حدد $z_{B'}$ لحق B' صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه O و نسبته $\sqrt{3}$.

0,25 ب- بين أن : $R(A)=B'$ ، حيث R هو الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{5\pi}{6}$.

ج- حدد الكتابة العقدية للتحويل $F=R\circ h$ ، ثم إستنتج أن صورة المستقيم (D) الذي

0,5 معادلته : $y=\sqrt{3}x$ بالتحويل F مستقيم (D') ينبغي تحديده .

■ **التمرين رقم 04:** (3,5 نقطة)

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+);F(x)=e^{-x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt \ .$$

0,5 **1**)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});0\le F(x)\le\dfrac{x^3}{3}e^{-x^2}$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

0,5 ب- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);F'(x)=xe^{-x^2}G(x)$.

حيث G هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $G(x)=xe^{-x^2}-2\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$.

0,5 **2**)- بين أن G تناقصية قطعا على المجال $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ و أن : $\left(\forall x\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right]\right);G(x)\succ0$.

3)- لتكن H الدالة المعرفة على القطعة $[0,1]$ بما يلي :

$$(\forall x\in]0,1]);H(x)=F(-\ln x) \text{ و } H(0)=0 \ .$$

0,5 أ- بين أن H تحقق شروط مبرهنة رول على $[0,1]$.

0,75 ب- إستنتج أنه : $(\exists!a\in\mathbb{R}^{*+});F'(a)=0$ و أن : $a\succ\dfrac{1}{2}$.

0,75 **4**)- أثبت أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);F(x)\le\dfrac{1}{2}ae^{-2a^2}$.

■ **التمرين رقم 05: (6,5 نقطة)**

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = (1+x^2)e^{-x} .$$

0,5 **1**)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

0,5 **2**)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

0,5 **3**)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = (x^2-4x+3)e^{-x}$ ، ثم أدرس تقعر المنحنى (C_f) .

0,5 **4**)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (حيث الوحدة هي $1cm$) .

0,5 **5**)- تحقق أن f حل للمعادلة التفاضلية : $(E): y''+2y'+y = 2e^{-x}$ و إستنتج مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x=0$ و $x=1$.

II- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = \frac{1}{3}\ln 2 \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) .$$

0,5 **1**)- بين أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن : $\alpha \in \left]\frac{\ln 2}{3}, 1\right[$.

0,5 **2**)- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{3}\ln 2 \le u_n \le 1$.

0,75 ب- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}); e^{-x} \ge 1-x$ ، ثم إستنتج أن : $\left(\forall x \in \left[\frac{\ln 2}{3}, 1\right]\right); |f'(x)| \le \frac{1}{2}$.

0,5 ج- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

III- لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N}^*); b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 .$$

0,5 **1**)- بين أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها و أن : $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

2)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $c_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

0,5 أ- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x - \frac{1}{2}x^2 \le \ln(1+x) \le x$.

0,75 ب- إستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); a_n - \frac{1}{2}b_n \le \ln(c_n) \le a_n$ ، ثم بين أن المتتالية $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و حدد نهايتها .