الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2020
- الموضوع -

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 24F

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | مدة الإنجاز | الرياضيات | المادة |
| 9 | المعامل | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية) | الشعبة أو المسلك |

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (5) pages numérotées de 1/5 à 5/5
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.**
- **Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices :**

- EXERCICE1 qui concerne l'arithmétique **(au choix)**..................**3.5 points**
  **ou bien**
  EXERCICE2 qui concerne les structures algébriques **(au choix)**..................**3.5 points**

- EXERCICE3 qui concerne les nombres complexes **(obligatoire)**..................**3.5 points**

- EXERCICE4 qui concerne l'analyse **(obligatoire)**..................**13 points**

**L'usage de la calculatrice est strictement interdit**

**Tu choisis de traiter EXERCICE1 ou bien EXRCICE2**
**Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXRCICE4**

**<u>EXERCICE1</u> :(3.5 points/au choix)**

**(Si tu choisis de traiter EXERCICE1, il ne faut pas traiter EXERCICE2)**

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(D)\ :\ 7x^3-13y=5$

1- Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation $(D)$

0.5 a) Montrer que $x$ et $13$ sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $x^{12}\equiv 1\ [13]$

1 c) Montrer que : $x^3\equiv 10\ [13]$

0.5 d) En déduire que : $x^{12}\equiv 3\ [13]$

1 2- Déduire des questions précédentes, que l'équation $(D)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

**EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)**

**(Si tu choisis de traiter EXERCICE2, il ne faut pas traiter EXERCICE1)**

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble $E$ de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R} \ et \ y\in\mathbb{R}^*\right\}$.

0.5 1- a) Montrer que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.5 b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans $E$

0.5 c) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}^*)$ ; $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & \frac{-x}{y}\\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{-x}{y}\\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

0.5 2- Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif.

3- On considère le sous-ensemble $F$ de $E$ défini par : $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1 & x-1\\ 0 & x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0.5 a) Montrer que l'application $\varphi$ définie par : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$ ; $\varphi(x)=M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$ .

1 b) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

**EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)**

**Soit $m$ un nombre complexe non nul.**

**Première partie :**

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ , $(E)$ : $z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

0.5 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ ( On remarque que $m$ est une solution de l'équation $(E)$ )

2- On note $z_1$ et $z_2$ les deux autres solutions de l'équation $(E)$ autre que $m$

0.25 a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{m}$

0.5 b) Dans le cas où $m=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique $z_1$ et $z_2$

**Deuxième partie** :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a=me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b=me^{-i\frac{\pi}{3}}$

On note $P$ le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme $O$ en $A$,

$Q$ le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme $A$ en $B$

et $R$ le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme $B$ en $O$

0.25 1- Montrer que les points $O$ , $A$ et $B$ ne sont pas alignés.

1 2-a) Montrer que l'affixe de $P$ est $p=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de $R$ est $r=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0.5 b) Montrer que l'affixe de $Q$ est $q=m\sqrt{2}\,sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0.5 3- Montrer que $OQ=PR$ et que les deux droites $(OQ)$ et $(PR)$ sont perpendiculaires.

**EXERCICE4 :(13 points/obligatoire)**

**Première partie :**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad (\forall x\in ]0;+\infty[) \quad ; \quad f(x)=x^3\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

(On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$ )

0.5 1- On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t\mapsto ln(t)$ sur l'intervalle $[x,x+1]$ , montrer que : $(P)$ $\quad (\forall x\in ]0;+\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{x+1}<ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$

0.5 2-a) En utilisant la proposition $(P)$ , montrer que la fonction $f$ est dérivable à droite en $0$

0.5 b) En utilisant la proposition $(P)$, montrer que la courbe $(C)$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0.75 3-a) Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in ]0;+\infty[) \quad ; \quad f'(x)=3x^2\left(ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0.5 b) En déduire que la fonction $f$ est strictement croissante sur $I$

(On pourra utiliser la proposition $(P)$ )

0.25 c) Dresser le tableau de variations de $f$

4- Pour tout $x\in ]0;+\infty[$ , on pose : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

0.75 a) Vérifier que : $(\forall x\in ]0;+\infty[) \quad ; \quad g'(x)=2x\left(ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$ , en déduire que la fonction $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

0.5 b) Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution unique notée $\alpha$ puis vérifier que $\alpha\in ]1;2[$ (On prendra $ln2=0.7$ et 4 $ln\frac{3}{2}=1.5$ )

0.5 c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x)=x$ sont $0$ et $\alpha$

0.5 5-a) Représenter graphiquement la courbe $(C)$.

(On précisera la demi-tangente à droite en $O$ et la branche parabolique de $(C)$)

0.25 b) Montrer que $f$ est une bijection de $I$ vers $I$ (On note $f^{-1}$ sa bijection réciproque)

**Deuxième partie** :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $0<u_0<\alpha$ et $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

0.5 1- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; 0<u_n<\alpha$

0.5 2-a) Montrer que : $g(]0;\alpha[)=]0;1[$

0.5 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

0.5 3- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**Troisième partie** :

On considère la fonction $F$ définie sur l'intervalle $I$ par : $(\forall x\in I) \; ; \; F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

0.5 1-a) Etudier suivant les valeurs de $x$ , le signe de $F(x)$

0.5 b) Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $I$ et déterminer sa dérivée première $F'$

0.25 c) En déduire que $F$ est strictement décroissante sur $I$

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[)\quad ;\quad F(x) \leq (1-x)\ln 2$

0.25 b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

0.5 3-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in ]0;+\infty[)\quad ;\quad F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{t+1}dt$$

0.5 b) Calculer $\int_x^1 \frac{t^3}{t+1}dt$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$ (On remarque que : $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$)

0.5 c) En déduire que : $(\forall x \in ]0;+\infty[)\quad ;\quad F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ , en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$

4- Pour tout entier naturel non nul $n$ , on pose : $v_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

0.5 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0,1,,,,,,,,,n-1\}$ :

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad ;\quad -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

(On remarque que : $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$ )

0.25 c) Montrer que la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

**FIN**